

## Cours 2 - rappels: Circuits de courant alternatif

Dimitri Galayko,  
dimitri.galayko@lip6.fr

LIP6  
University of Paris-VI  
France

Cours Elec-Ana  
SESI M1  
septembre 2013

# Outline

- 1 Introduction : éléments de circuits de courant alternatif
- 2 Analyse de circuit de courant alternatif
  - Généralités
  - Transformation de Laplace
  - Fonction de transfert
- 3 Lien entre la transformation de Fourier et de Laplace

# Outline

- 1 Introduction : éléments de circuits de courant alternatif
- 2 Analyse de circuit de courant alternatif
  - Généralités
  - Transformation de Laplace
  - Fonction de transfert
- 3 Lien entre la transformation de Fourier et de Laplace

## Sources de courant alternatif

Les circuits de courant alternatif: ceux où il y a une variation de courant ou de tension dans le temps.

La raison de ces variations:

- Les phénomènes transitoires dus aux changements de topologie de circuit (commutations).
- Les sources de courant/tension variables.
- La variation des paramètres de composants (par ex., une capacité variable). Ce cas n'est pas abordé dans ce cours.

Exemple de source de tension alternative est une source sinusoïdale:

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_0), \quad (1)$$

où  $V_0$  est l'amplitude de la source continue,  $\phi_0$  est la phase initiale.

Un autre exemple: un créneau

$$V(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ V_0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

# Conséquences sur l'analyse des circuits

- Pour les circuits résistifs, le fait que les sources soient alternatives n'a aucune impacte sur l'analyse présentée dans le cours 1.
- Toutes les équations sont algébriques et linéaires. Chaque tension/courant inconnu du circuit est une projection sur l'espace défini par les sources indépendantes, constantes ou alternatives.
- Il y a deux éléments dits réactifs dont le comportement en circuits de courant alternatif diffère du cas des circuits de courant continu:
  - le condensateur (capacité)
  - la bobine (inductance).

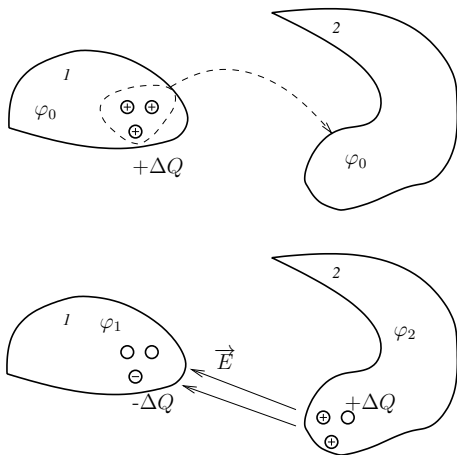
# Le condensateur

Phénomène de la capacité mutuelle entre deux corps conducteurs.

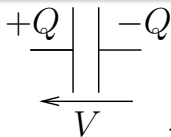
- $|\Delta Q|$  : la charge de la capacité.
- Une relation linéaire entre la différence de potentiel et la charge

$$\Delta Q = C(\phi_2 - \phi_1). \quad (3)$$

- Sens conventionnel positif: le potentiel est plus grand sur l'électrode où la charge est positive ( $+\Delta Q$ ).
- La capacité se mesure en Farads :  $[C] = F = C/V$



# Le condensateur comme élément idéal de l'électronique



– Un condensateur est un dipôle. La relation entre la charge du condensateur et la tension est donnée par la relation

$$Q = CV. \quad (4)$$

- La charge: la grandeur que l'on ne peut pas mesurer directement
- On se souvient que le courant est la dérivée de la charge:

$$i = \frac{dQ}{dt}. \quad (5)$$

- Ainsi, pour le condensateur nous avons

$$i = C \frac{dV}{dt}. \quad (6)$$

- $C$  : la constante qui s'appelle "capacité", se mesure en Farads.

## Le condensateur dans les circuits de courant continu

- La relation entre le courant et la tension est linéaire et différentielle.

$$i = C \frac{dV}{dt}. \quad (7)$$

- Puisque  $V = \text{const}$ , nous avons  $i = 0$ .
- Ainsi, pour les circuits de courant continu un condensateur se comporte comme un circuit ouvert.
- Il possède néanmoins une charge égale à  $q = CV$ .
- Un condensateur emmagasine une énergie :

$$W = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} \quad (8)$$

Un condensateur peut se *charger*, en accumulant de l'énergie, ou se *décharger*, en *rendant* l'énergie. Sa puissance instantanée peut donc être positive ou négative.

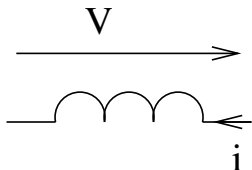
Notez que l'énergie du condensateur est liée à sa *charge*, ou à sa *tension*



# Inductance

- L'inductance est un élément dont les propriétés sont liées au champ magnétique produit par le courant électrique.
- Une bobine (on dit également "une self") est un dipôle qui réalise la relation linéaire entre le courant et le flux magnétique, et une relation différentielle entre le courant et la tension:

$$\phi = Li, \quad V = L \frac{di}{dt}. \quad (9)$$



$L$ : l'inductance, se mesure en Henry (H)

Pour les circuits de courant continu:

- sa tension est nulle – donc, une bobine se comporte comme un court-circuit.

# Énergie de l'inductance

- De même qu'une capacité, l'inductance emmagasine de l'énergie.
- Pour l'inductance, l'énergie est liée au *courant* ou au *flux*:

$$W = \frac{Li^2}{2} = \frac{\phi^2}{2L} \quad (10)$$

- L'énergie de l'inductance est liée au courant et au flux.
- De même que pour une capacité, l'inductance peut accumuler ou rendre l'énergie.

# Énergie et évolution des courants et des tensions

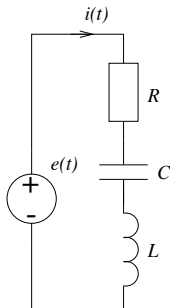
- La règle fondamentale: l'énergie ne peut pas varier instantanément.
- Par conséquent, les grandeurs définissant l'énergie dans les éléments réactifs doivent être continues: le courant dans l'inductance, la tension dans la capacité.
- Ceci est à l'origine des phénomènes transitoires dans les circuits réactifs.

# Outline

- 1 Introduction : éléments de circuits de courant alternatif
- 2 Analyse de circuit de courant alternatif**
  - Généralités
  - Transformation de Laplace
  - Fonction de transfert
- 3 Lien entre la transformation de Fourier et de Laplace

# Analyse de circuits de courant alternatif

- On constitue les équations de la même manière que pour les circuits de courant continu, en utilisant :
  - Les lois des mailles et des nœuds,
  - Les relations entre les tensions et les courants des dipôles
- On obtient un système d'équation différentielles linéaires.



$$\begin{cases} q/C + \dot{q}R + \ddot{q}L = e(t) \\ i = \dot{q} \end{cases} \quad (11)$$

Les conditions initiales de l'équation représentent l'énergie des éléments réactifs:

- Les charges (tensions) des condensateurs,
- Les courant (flux) des inductances

$$q(0) = V_C(0) \cdot C, \quad \dot{q}(0) = i_L(0).$$

## Analyse de circuits de courant alternatif

Les équations différentielles linéaires ont les solutions de type :

$$v(t) = v_{trans}(t) + v_{etabli}(t) \quad (12)$$

où  $v(t)$  est une grandeur inconnue du circuit,  $v_{trans}$  est la composante *transitoire*,  $v_{etabli}$  est la composante établie.

La composante transitoire a la forme suivante :

$$v_{trans}(t) = \sum_{i=1}^m A_i \exp(p_i t), \quad (13)$$

où  $p_i$  sont les *pôles* du système (cf. plus bas),  $A_i$  sont des constantes qui dépendent des conditions initiales.

Les pôles d'un système linéaire sont une "signature" du système. Ce sont des nombres complexes, en cas général :

$$p_i = \sigma_j + j\omega_j. \quad (14)$$

A noter,  $v_{trans}(t)$  est réel: cela veut dire que les nombres complexes dans l'équation (15) sont présentes par paires conjuguées.

# Analyse de circuits de courant alternatif

Les pôles d'un système linéaire stable ont les parties réelles négatives: cela veut dire que la composante transitoire décroît vers zéro avec le temps.

$$v_{trans}(t) = \sum_{i=1}^m A_i \exp(p_i t), \quad (15)$$

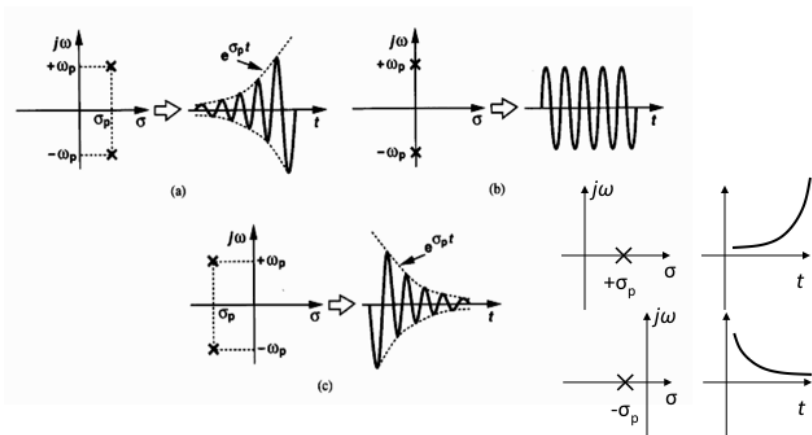
Si on détaille cette expression, il y a 2 types de réponses transitoire pour un système stable:

$$v(t) = A \exp(\sigma t) \quad (16)$$

$$v(t) = A \exp(\sigma t) \cos(\omega t + \phi) \quad (17)$$

Dans les systèmes stables,  $\sigma < 0$ :  
les réponses transitoires s'éteignent avec le temps.

# Reponses transitoires en fonction des valeurs de pôles





# Réponse stationnaire

**Réponse stationnaire, ou mode stationnaire:** les tensions/courants affichés par le circuit après la fin de la réponse transitoire. Le régime établi ne dépend pas des conditions initiales. Dépend des sources d'énergie *indépendantes*. Les trois cas sont importants:

- 1) Le circuits n'a que des sources continues. Dans ce cas, le régime établi se calcule par une analyse du circuit comme si c'était un circuit de courant continu. Les capacités=circuits ouverts, les inductances=court circuits
- 2) Le circuit n'a que des sources sinusoïdales: toutes les tensions et les courants en régime établis sont des superposition des fonctions sinusoïdales, à fréquences correspondantes aux fréquences des sources.
- 3) Le circuit a des sources sinusoïdales et continues : en vertu du principe de superposition, les courant et les tensions sont des superposition des sinus et des niveaux continus.

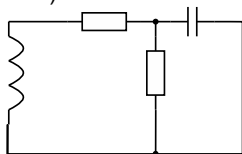
# Facteurs extrinsèques et intrinsèques

## Effets intrinsèque et extrinsèque dans la réponse des circuits linéaires.

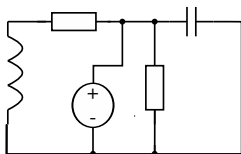
Les pôles sont les paramètres *intrinsèques* du circuit. Ils ne dépendent pas de la présence ou absence des sources d'énergie dans le circuit, tant que la topologie reste la même.

### MAIS!!!

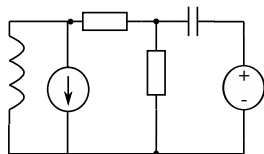
La topologie du circuit est définie lorsque les sources sont éteintes. Ainsi, les circuits a) et b) n'ont pas les mêmes pôles, mais le circuit a) et c) ont les mêmes pôles.



a)



b)



c)

# Résolution pratique des équations de circuit

- Il existe un grand nombre de méthodes permettant de résoudre les équations différentielles linéaires.
- La méthode la plus commune : appliquer une transformation afin de remplacer les équations différentielles en équations algébriques équivalents.
- On utilise la transformation de Fourier ou de Laplace.
- Ces transformations s'appliquent à une fonction réelle  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  soumise à certaines restrictions:
  - Elle doit croître moins vite qu'une fonction exponentielle,
  - Elle est défini pour les valeurs positives de l'argument ( $t > 0$ )

# Transformation de Laplace

La transformée de Laplace  $F(p)$  pour une fonction  $f(t)$  est donnée par :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt \quad (18)$$

Ici  $p$  est la variable de Laplace, qui est une grandeur complexe:

$$p = \sigma + j\gamma \quad (19)$$

La restriction qui s'applique à  $f(t)$  est la suivante:  $f(t)$  doit croître moins vite qu'une fonction exponentielle quelconque. Autrement dit, il doit exister des constantes  $\lambda$  et  $A$  telles que :

$$\int_0^{\infty} f(t) \exp(-\lambda t) dt < A \quad (20)$$

La transformation de Laplace est linéaire.

## Transformation de Laplace pour la dérivée

Soit

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt}. \quad (21)$$

Soit on connaît la transformée de Laplace pour  $f(t)$ , qui est  $F(p)$ .  
La transformée de Laplace pour  $g(t)$  est :

$$\mathcal{L} \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \exp(-pt) dt = -f(0) + p \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt = (22)$$

$$-f(0) + pF(p) \quad (23)$$

Ici,  $f(0)$  est la valeur initiale de  $f$  à  $t = 0$ . Si on ne s'intéresse qu'aux régimes établis, on la pose égale à zéro.

# Transformation de Laplace pour l'intégrale

La transformation de Laplace  $F(p)$  pour une fonction  $f(t)$  est donnée par :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt \quad (24)$$

De la même manière, pour une primitive nous avons :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{F(p)}{p} \quad (25)$$

Ainsi, on remplace la dérivation par multiplication par  $p$ , et l'intégration par division par  $p$ .

## Application à l'analyse des circuits

- On utilise surtout la transformation de Laplace pour trouver les régimes établis. Dans ce cas, les conditions initiales ne sont pas importantes, et peuvent être posées nulles.
- On applique la transformation de Laplace aux équations de circuit.
- On suppose connaître les images de Laplace de toutes les grandeurs générées par les sources indépendantes (on peut les calculer)
- On exprime les courants et les tensions inconnus à travers les images des sources indépendantes et la variable  $p$

## Le résultat obtenu

Pour les circuits à paramètres localisés décrits par des ODE on obtient toujours un résultats du type suivant pour une tension ou courant ou tension inconnu du circuit:

$$V(p) = \sum_{i,j} K_i(p)I_i(p) + K_j(p)E_j(p), \quad (26)$$

où  $I_i(p)$  et  $E_j(p)$  sont les images des grandeurs générées par les sources de courant et de tensions indépendantes,  $K_i(p)$  et  $K_j(p)$  sont des fonctions rationnelles de  $p$ :

$$K_i(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0} \quad (27)$$



## Le résultat obtenu

Le plus souvent, on s'intéresse aux systèmes dits SISO: "single input single output". Dans ce cas, on a une seule source indépendante qui génère un signal, et on souhaite connaître la réaction de la grandeur de sortie à ce signal. Les équations précédentes se réduisent:

$$V_{out}(p) = K(p)V_{in}(p), \quad (28)$$

$$K(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0} \quad (29)$$

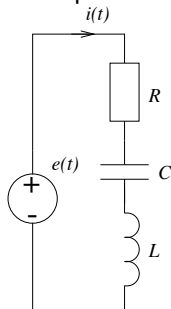
La fonction de Laplace  $K(p)$  s'appelle "fonction de transfert de l'entrée  $V_{in}$  vers la sortie  $V_{out}$ ". Les zéros du dénominateur s'appellent "les pôles de la fonction de transfert", les zéros du numérateur s'appellent "les zéros de la fonction de transfert".

# Fonction de transfert

La fonction de transfert est un rapport entre :

- l'image de Laplace d'une grandeur de circuit, *autre que celle générée par une source indépendante*,
- et l'image de Laplace d'une grandeur générée par une source indépendante. Généralement, on considère les conditions initiales nulles (on s'intéresse uniquement aux régimes stationnaires).

Exemple du circuit RLC:



Equation dans le domaine temporelle:

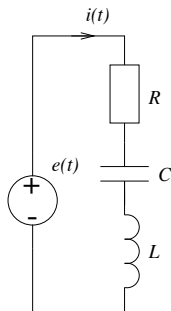
$$\begin{cases} q/C + \dot{q}R + \ddot{q}L = e(t) \\ i = \dot{q} \end{cases} \quad (30)$$

Dans le domaine de Laplace:

$$\begin{cases} Q(p)/C + pq(p) \cdot R + p^2q \cdot L = e(P) \\ I(p) = pQ(p) \end{cases} \quad (31)$$

# Fonction de transfert

On peut définir une fonction de transfert entre:  
– le courant  $i(t)$  et la source  $e(t)$ :



$$H_1(p) = \frac{I(p)}{E(p)} = \frac{p}{1/C + pR + p^2L} \quad (32)$$

– la tension sur l'inductance  $v_L(t)$  et la source  $e(t)$ , sachant que

$$v_L = L \frac{di}{dt} \rightarrow V_L(p) = L \cdot pI(p) \quad (33)$$

$$H_1(p) = \frac{I(p)}{E(p)} = \frac{Lp^2}{1/C + R/p + L/p^2} \quad (34)$$

# Résumé de la méthodologie d'analyse de circuits par méthode de Laplace

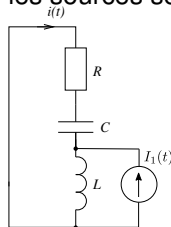
- Remplacement des relations différentielles par des relations algébriques linéaires
- Les capacités et inductances sont "vues" comme des résistances de valeur complexes,  $1/(pC)$  et  $pL$  respectivement.
- La fonction de transfert, absente dans circuits de courant continu, joue un rôle primordial pour l'analyse du circuit.
- Une fonction de transfert: une fonction rationnelle d'argument complexe ( $p$ , variable de Laplace).

# Fonction de transfert

Peut-on définir d'autres fonctions de transfert pour un circuit ?  
Oui ! pour cela, il y a deux méthodes, donnant des résultats différents.

1) Sans modifier les pôles du circuit.

On peut alors imaginer une connection d'autres sources d'énergie indépendantes, sans modifier la topologie du circuit au cas où toutes les sources sont éteintes.



Ici, on a connecté une source de courant indépendante  $I_1$ .

On peut définir une fonction de transfert entre  $i(t)$  et  $I_1(t)$ , ou entre  $V_C(t)$  et  $I_1(t)$ .

Une telle connection est pertinente, par exemple, quand on a besoin d'analyser la réaction d'un circuit à des perturbations (bruits...).

# Fonction de transfert

2) Avec modification des pôles du circuit.

Par exemple, quand on souhaite savoir comment la tension ou le courant sur un dipôle impacte une autre grandeur du circuit.

Dans ce cas, il faut *remplacer* l'élément le dipôle par une source de tension  $v$  ou une source de courant  $i$ . il faut analyser le nouveau circuit, et calculer la grandeur en question.

Exemple 1: un circuit multi-étages (par ex., un amplificateur). on souhaite calculer le gain d'un étage, c.a.d., le rapport entre la tension de sortie  $v_{out}$  et la tension d'entrée. on place alors une source de tension à l'entrée, ce qui revient à remplacer tous les étages précédentes par cette source.

Dans ce cas, le circuit est *modifié*; la nouvelles fonction de transfert n'aura pas les mêmes pôles que le circuit original.

# Fonction de transfert

Exemple 2: on souhaite trouver le rapport entre le courant et la tension d'un même dipôle. Une telle fonction de transfert s'appelle "Impédance du dipôle" désigné  $Z$  si on fixe le courant et mesure la tension, ou "admittance du dipôle" désignée  $Y$ , si on fixe la tension. Notez que l'impédance ou l'admittance mesurées ainsi ne dépendent pas de l'environnement du dipôle (le circuit auquel il est connecté).

# Les pôles de la fonction de transfert

Les pôles d'une fonction de transfert ont une signification très importante.

- 1) Toutes les fonctions de transfert ont les mêmes pôles, si les systèmes correspondants ont la même observabilité (cf. explication plus bas).
- 2) Les valeurs des pôles définissent la dynamique transitoire de la réponse de la sortie:

$$V_{out}(t) = \sum_{i=1}^m A_i \exp(p_i t), \quad (35)$$

où  $A_i$  sont des constantes,  $p_i$  sont des pôles du circuit (les zéros de la fonction de transfert).

On peut constater que pour que le système soit stable, il faut que les fonctions exponentielles soient unitaires ou décroissent. Ainsi, pour un système stable,

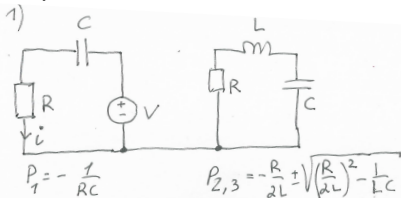
$$\operatorname{Re} p_i \leq 0. \quad (36)$$



Quelle est la différence entre les pôles d'une fonction de transfert (ensemble  $\{P_F\}$ ) et ceux du circuit (ensemble  $\{P_C\}$ ) ?

Réponse:  $P_F \subset P_C$ .

Exemple 1.



Le circuit a 3 pôles

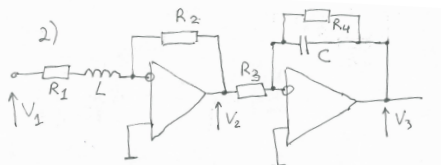
Une fonction de transfert de  $V$  vers  $i$  est:

$$\frac{i}{V} = \frac{1}{R + \frac{1}{pC}}, \text{ un seul pôle: } -\frac{1}{RC} = P_1$$

Donc, on a bien une inclusion:

$$\{P_1\} \subset \{P_1, P_2, P_3\}$$

## Exemple 2.



Pôles du système:  $\left\{ -\frac{L}{R_1}, -\frac{1}{R_4 C} \right\}$

Fonction de transfert:

a)  $V_1 \rightarrow V_2$ :  $\frac{V_2}{V_1} = -\frac{R_2}{pL + R_1}$  pôle:  $-\frac{L}{R_1}$

b)  $V_2 \rightarrow V_3$ :  $\frac{V_3}{V_2} = -\frac{1}{R_3} \frac{1}{\frac{1}{R_4} + pC}$ ; pôle:  $-\frac{1}{R_4 C}$

c)  $V_1 \rightarrow V_3$ :  $\frac{V_3}{V_1} = \frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{V_3}{V_2} = \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{1}{pL + R_1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_4} + pC}$

pôles:  $\left\{ -\frac{L}{R_1}, -\frac{1}{R_4 C} \right\}$

# Transformation inverse de Laplace

- Une fois les images de Laplace des sorties trouvées, il faut revenir vers les fonctions réelles.
- Pour cela, il existe la transformation inverse de Laplace.
- Cependant, il n'est presque jamais nécessaire de le faire.
- Principalement, grâce au lien qui existe entre la transformée de Laplace et la transformée de Fourier.

# Outline

- 1 Introduction : éléments de circuits de courant alternatif
- 2 Analyse de circuit de courant alternatif
  - Généralités
  - Transformation de Laplace
  - Fonction de transfert
- 3 Lien entre la transformation de Fourier et de Laplace

## Transformation de Fourier

La définition de la transformation de Fourier pour la fonction  $f(t)$ :

$$\mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \quad (37)$$

La restriction qui s'applique à  $f(t)$  est plus forte que pour la transformation de Laplace:  $f(t)$  doit avoir une énergie finie, ainsi que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < A, \quad (38)$$

où  $A$  est une constante non-négative.

On peut voir que la transformation de Fourier possède les mêmes propriétés que la transformation de Laplace:

- les images des dérivées et des intégrales sont données par multiplication et division par  $j\omega$
- la convolution des fonction devient une multiplication des images.
- On a donc une notion de la fonction de transfert dans le domaine de Fourier pour un système décrit par une équation linéaire, comme (30), pourvu que la fonction  $e(t)$  soit d'énergie finie.

## Sens physique de la fonction de transfert

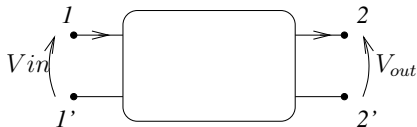
*Lien entre la transformée de Fourier et la transformée de Laplace:* si on remplace  $p$  par  $j\omega$  dans (41), on obtient la fonction de transfert du même circuit dans le domaine de Fourier.

- Soit un circuit avec une entrée à laquelle on connecte une source de tension, et une tension définie comme la tension de sortie.
- Soit la fonction de transfert a été calculée dans le domaine de Laplace :  $K(p)$
- Soit la source d'entrée est une tension sinusoïdale:

$$V_{in} = V_{in0} \cos(\omega t + \phi_0) \quad (39)$$

Alors, la tension de sortie sera égale à :

$$V_{out} = V_{in0} |K(j\omega)| \cos(\omega t + \phi_0 + \arg(K(j\omega))) \quad (40)$$



# Conclusions sur la méthodologie d'analyse de circuits par méthode de Laplace

Que peut-on tirer d'une fonction de transfert ?

$$K(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0} \quad (41)$$

- Factorisation des numérateur et dénominateur de la fonction de transfert (théorème fondamental d'algèbre).
- Les zéros du numérateur: les *zéros* de la fonction de transfert
- Les zéros du dénominateur: les *pôles du circuit*.
- Toutes les fonctions de transferts du circuit ont les mêmes pôles.
- Le diagramme de Bode: la fonction de transfert dans le domaine fréquentiel.

## Principe du diagramme de Bode

Le diagramme de Bode est définie par deux courbes tracées en fonction de la fréquence:

– Le gain à l'échelle logarithmique, se mesure en *Décibels*:

$$Gain(\omega) = 20 \log_{10} |H(j\omega)| \quad (42)$$

– La différence de phase entre les grandeurs de sortie et celle d'entrée:

$$phase(\omega) = arg(H(j\omega)) \quad (43)$$

L'axe des fréquences est représenté à l'échelle logarithmique, sur la base de 10.

Pour estimer le gain, on utilise l'estimation *asymptotique*. Soit un multiple élémentaire de la fonction de transfert:

$$H_1(p) = (p - p_i)^a, \quad a \in \{-1, 1\} \quad (44)$$

On se souvient que l'on remplace  $p$  par  $j\omega$ .



## Diagramme de Bode asymptotique

- Si  $\omega \ll |p_i|$ ,  $|H_1(p)| \approx |p_i|$ , et  $20 \log_{10} |H_1(j\omega)| \approx \text{const.}$
- Si  $\omega \gg |p_i|$ ,  $|H_1(p)| \approx \omega^a$ , et  $20 \log_{10} |H_1(j\omega)| \approx 20a \log_{10} \omega$ .

On se souvient que l'axe des ordonnées est  $\log_{10} \omega$ . Ainsi:

- pour les fréquences moins de  $|p_i|$ , la fonction de transfert est une constante, au niveau 0, pour les fréquences supérieures à  $|p_i|$ ,
- pour les fréquences supérieures à  $|p_i|$ , la fonction de transfert est une droite à pente 20 décibels par décade, avec une pente négative si  $p_i$  est un pôle ( $a = -1$ ), et avec une pente positive si  $p_i$  est un zéro ( $a = +1$ ).
- Pour une fonction de transfert à plusieurs pôles/zéros: le logarithme transforme la multiplication en addition. Ainsi, on trace l'allure asymptotique du diagramme de Bode à partir des basses fréquences, en ajoutant ou en déduisant la pente par 20 db/décade, chaque fois que l'on rencontre un zéro ou un pôle.

## Limites du diagramme de Bode asymptotique

Le diagramme de Bode asymptotique est représentatif seulement quand les pôles et les zéros sont espacés en fréquences (au minimum, un demi décade)

Pôles résonants: pas représentés par le diagramme de Bode asymptotique.

Exercice: tracer le diagramme de Bode du circuit RLC série excité par une source de tension.  $L=1\text{e-}6$  H,  $C=1\text{e-}6$  F,  $Q=\{1, 5, 100\}$

# Bases sur l'analyse de circuits non-linéaires.

90% de la théorie des circuits traite des circuits linéaires.

Les circuits non-linéaires:

- Diodes
- Transistors
- Amplificateurs réels
- Sources d'alimentation
- Comparateurs
- Portes logiques (vu au niveau de transistor)

Comment les traiter ?

## Bases sur l'analyse de circuits non-linéaires.

Les circuits non-linéaires sont ceux qui comportent des éléments non-linéaires.

Les lois de Kirshhoff restent valides pour ces circuits. Mais les équations (différentielles ou algébriques) qui en résultent sont non-linéaires. Il n'y généralement pas de méthode de résolution.

## Bases sur l'analyse de circuits non-linéaires.

La méthode d'analyse en régime de petit signal: marche pour des circuits faiblement non-linéaires, dans le contexte où on peut parler du traitement du signal:

- Amplificateurs
- Portes logiques *en zone de transition*
- Sources d'alimentation lors de l'analyse de la stabilité vis-à-vis des perturbations
- En général, toute étude de la sensibilité aux perturbation se fait en régime petit signal.
- Analyse de stabilité

## Analyse en régime de petit signal.

Soit un dipôle non-linéaire, dont la relation courant-tension est donnée par une fonction  $f(\cdot)$ :

$$V = f(I) \quad (45)$$

La méthode est basée sur le développement limité en série de Taylor. On suppose que le courant  $I$  est presque constant, de valeur moyenne  $I_0$ , et que de faibles variations  $i$  du courant existent, superposées sur  $I_0$ :

$$I = I_0 + i \quad (46)$$

Dans ce cas, la tension peut s'écrire:

$$V = f(I) \approx f(I_0) + i \left. \frac{df}{dI} \right|_{I=I_0} \quad (47)$$

En nommant  $f(I_0) = V_0$  et  $\left. \frac{df}{dI} \right|_{I=I_0} = r$ , on obtient pour la tension:

$$V = V_0 + i \cdot r \quad (48)$$

## Analyse en régime de petit signal.

Ainsi, le dipôle non-linéaire est modélisé par :

- une source de tension continue  $V_0$  qui est fonction du courant  $I_0$ ,  
 $V_0 = f(I_0)$
- Une résistance  $r$ .

Le couple  $V_0, I_0$  s'appelle *point de polarisation* du dipôle non-linéaire, et le paramètre  $r$  sa *résistance petit signal*.

Si tous les dipôles non-linéaires sont représentés par ses circuits équivalents (source continue + résistance petit signal), on obtient un réseau linéaire, qui se modéliser par les méthodes bien maîtrisées. De plus, généralement on ne s'intéresse que des petites variations; ainsi, en vertu du principe de superposition, on éteint toutes les sources continue.

Dans cette optique, un dipôle non-linéaire est modélisé tout simplement par sa résistance petit signal.