Cours 3 - rappels: Analyse des quadripôles

Dimitri Galayko,
dimitri.galayko@lip6.fr

LIP6
University of Paris-VI
France

Cours Elec-Ana
SESI M1
septembre 2013

Outline

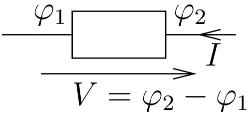
Outline

Quadripôles *vs* dipôles

- Rappel : un dipôle est un système électrique accessible par 2 terminaux (fils). C'est une boîte noire.
- Un dipôle est défini par N équations avec $N+1$ inconnues, parmi lesquelles sont le courant et la tension du dipôle.
- Si le dipôle est linéaire: des équations on peut éliminer $N-1$ inconnues, et l'équation du dipôle se réduit à:

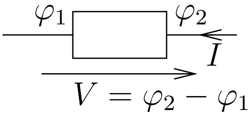
$$A \cdot I + B \cdot V + C = 0, \qquad (1)$$

où I et V sont le courant et la tension du dipôle, A, B sont des constantes qui dépendent de la structure interne du dipôle, C est non-nul uniquement si le dipôle contient des sources de courant/tension indépendantes (peut-on le prouver?).



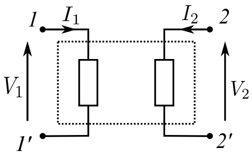
Quadripôles *vs* dipôles

- La dernière équation ne contient que 2 paramètres indépendants. Si le dipôle ne contient pas de sources d'énergie indépendantes, $C = 0$ et le dipôle se définit avec un seul paramètre, celui qui correspond à sa résistance interne, donnée par $R = A/B$.



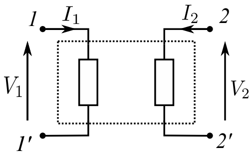
Quadripôles *vs* dipôles

- Imaginons deux dipôles *couplés*, c.a.d, dont certaines variables internes sont communes.
- Un tel système s'appelle un *quadripôle*.
- Un quadripôle peut être vu comme un système électrique accessible par deux paires de terminaux.
- Les paires de terminaux sont prédéfinies, leurs définition fait partie de la définition du quadripôle. Les paires de terminaux sont numérotées (1 et 1', 2 et 2').
- L'appellation fréquente "entrée" et "sortie" est définie par la sémantique du contexte.



Quadripôles *vs* dipôles

- Un quadripôle a quatres paramètres vus de l'extérieurs: les 2 courants et les 2 tensions de ses paires de terminaux, appelés I_1, I_2, V_1, V_2.
- En général, les courants *entrent* dans le quadripôle, mais parfois on définit le courant I_2 sortant du quadripôle. C'est une question de convention.
- Soit un quadripôle à N grandeurs électriques internes inconnues, à part I_1, I_2, V_1, V_2. Combien d'équations le décrivent ?



Quadripôles *vs* dipôles

- Réponse: $N+2$. C'est-à-dire, le quadtripôle a 2 variables libres. En éliminant les N inconnues internes, on obtient le système d'équation pour les grandeurs observables de l'extérieur:

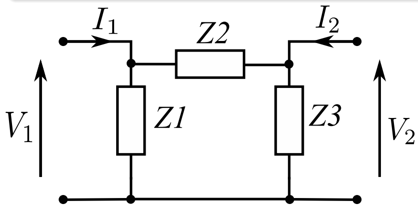
$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

- Ici A_i, B_i, C_i, D_i sont les paramètres qui dépendent de la structure du quadripôle,
- E_1 et E_2 qui sont différent de zéro si et seulement si le quadripôle *contient* des sources d'énergie indépendantes

Quadripôles *vs* dipôles: exercice

Etablir les équations générales du quadripôle

Pour ce quadripôles, trouver les deux équations contenant uniquement les éléments connus (Z1, Z2, Z3) et les grandeurs I_1, I_2, V_1, V_2.



Quadripôles *vs* dipôles: exercice

Outline

Quadripôles dans l'électronique

En général, les quadripôles considérés en électronique ne contiennent pas de sources indépendantes.

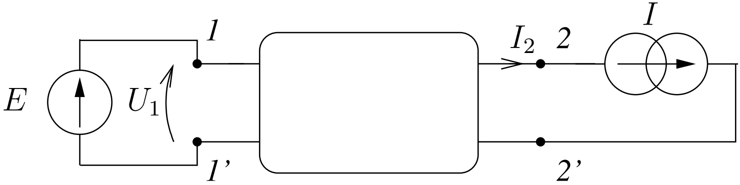
L'équation du quadripôle devient:

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

- Ces 2 équations ont 4 inconnues.
- Elles ont une infinité de solutions, et l'état électrique d'un quadripôle décrit ainsi n'est pas défini.
- Pour particulariser l'équation, il faut définir deux grandeurs parmi I_1, I_2, V_1, V_2.

Quadripôles dans l'électronique

Exemple d'un quadripôle dont l'état électrique est parfaitement défini:



Equations standards de quadripôles

Exemple: soit I_1 et V_2 sont connus. Transformons l'équation précédente :

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_2 \\ V_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

ou bien :

$$\begin{bmatrix} I_2 \\ V_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

On nomme:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Equations standards de quadripôle

On conclut que n'importe quelles 2 grandeurs externes de quadripôle sans sources indépendantes s'expriment à travers 2 autres grandeurs externes, via une relation matricielle de type:

$$Y = \beta X, \tag{7}$$

où X est le vecteur colonne de deux grandeurs supposées connues, X est le vecteur colonne de deux grandeurs supposées inconnues, β est une matrice 2×2 contenant 4 paramètres de quadripôle, dépendant de sa structure interne.

Equations standards de quadripôle

Paramètres d'impédance (paramètres Z) :

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Paramètres d'admittance (paramètres Y) :

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Paramètres hybrides (paramètres h) :

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Paramètres hybrides inverses (paramètres g) :

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Equations standards de quadripôle: paramètres ABCD

Paramètres ABCD (paramètres a) :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Paramètres ABCD inverses (paramètres b) :

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Paramètres ABCD sont très utiles pour décrire des cascades des quadripôles: la matrice a d'un cascade est un produit des matrices a des segments. Le signe $-$ devant I_2 est nécessaire pour permettre cette propriété.

Outline

Sens physique des paramètres des quadripôles

Il y a deux type de paramètres utiles:

- Impédance/admittance d'entrée/de sortie
  – Impédance: rapport entre tension et courant (ou leurs images Laplace) pour l'entrée ou la sortie, donnée par les paramètres Z.
- Gain en tension (param. g_{21} , en courant (param. h_{21}), de transrésistance (param. z_{21}), de transconductance (param. y_{21}).
  – Gain : rapport entre une grandeur de sortie et une grandeur d'entrée.
- *question*: 2 équations, 4 inconnues. Un rapport en élimine une, il faut en déterminer une de plus.
- Sémantique des entrées et des sorties de quadripôle: explications!!!

Sens physique des paramètres des quadripôles

L'explication sur la nécessité de déterminer une grandeur pour calculer un paramètre.

Example: impédance d'entrée d'un quadripôle. On connecte un ohmmètre à l'entrée... mais que fait on avec la sortie ???
Possibilités: laisser en circuit ouvert, mettre en court-circuit, charger avec une résistance... Le choix impactera le résultat ! (cf. l'exemple plus haut)
On considère l'équation en z:

$$\begin{cases} V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2 \\ V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2 \end{cases} \tag{14}$$

On voit que z_{11} donne l'impédance d'entrée *si* $I_2 = 0$, c.a.d., à sortie en circuit ouvert.

Sens physique des paramètres des quadripôles

Si on veut connaître l'impédance d'entrée pour une sortie court-circuitée, il faut prendre le paramètre h_{11}, qui donne l'impédance si $V_2 = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{array} \right. \tag{15}$$

Sens physique des paramètres des quadripôles

- Quel choix on fait ?
- Tout dépend de la sémantique de notre circuit.
- D'habitude, l'impédance d'entrée se mesure *sans charge*. Ainsi, si le quadripôle doit générer une tension, on laissera la sortie en circuit ouvert, si c'est le courant, on laissera la sortie en court-circuit.
- Parfois on veut calculer l'impédance d'entrée pour un quadripôle chargé (par ex., 50 Ohms). Alors, on doit fixer $V_2/I_2 = 50\ \Omega$, et injecter ce rapport dans un système d'équation Z de quadripôle.
- Ce choix ne découle pas de la structure interne du dipôle, mais des intentions de celui qui l'analyse.

Mesure de l'impédance de sortie

- L'impédance de sortie: V_2/I_2. Que faire de l'entrée ?
- Il faut définir I_1 ou V_1. Comme pour le calcul de l'impédance d'entrée, il y a 3 possibilités.
- Dans tous les cas, il s'agit d'éteindre la source d'entrée.
- Si l'entrée est une source de tension idéale, il faut la mettre à zéro, et $V_1 = 0$. Quel paramètre donne l'impédance de sortie ?
- Si l'entrée est une source de courant idéale, il faut la mettre à zéro, et $I_1 = 0$. Quel paramètre donne l'impédance de sortie ?
- Si la source d'entrée est réelle et a une impédance R_s, alors il faut fixer $V_1/I_1 = R_s$, et injecter cette équation dans l'équation z du quadripôle.

Mesure des gains

Un gain : un des 4 rapports:

- V_2/V_1 : gain en tension
- I_2/I_1 : gain en courant
- V_2/I_1 : gain de transrésistance ou de transimpédance
- I_2/V_1 : gain de transconductance ou de transadmittance

La même question : comment fixer une grandeur libre du quadripôle, et laquelle des deux restantes choisir?

- On ne peut pas fixer une grandeur d'entrée, car une est déjà fixée (on ne peut pas fixer indépendamment les 2 grandeurs d'un dipôle)
- On doit donc fixer la grandeur de sortie qui reste
- On a deux possibilités:
  1) On veut mesurer un gain sans charge: dans ce cas on fixe l'autre grandeur de sortie à zéro.
  2) Si on veut mesurer un gain avec charge (e.g., R_l): on fixe le rapport entre le courant et la tension en sortie à R_L, et on l'injecte dans le système d'équation du quadripôle qui va bien.

Bases sur l'analyse de circuits non-linéaires.

90% de la théorie des circuits traite des circuits linéaires.
Les circuits non-linéaires:

- Diodes
- Transistors
- Amplificateurs réels
- Sources d'alimentation
- Comparateurs
- Portes logiques (vu au niveau de transistor)

Comment les traiter ?

Bases sur l'analyse de circuits non-linéaires.

Les circuits non-linéaires sont ceux qui comportent des éléments non-linéaires.
Les lois de Kirshhoff restent valides pour ces circuits. Mais les équations (différentielles ou algébriques) qui en résultent sont non-linéaires. Il n'y généralement pas de méthode de résolution.

Bases sur l'analyse de circuits non-linéaires.

La méthode d'analyse en régime de petit signal: marche pour des circuits faiblement non-linéaires, dans le contexte où on peut parler du traitement du signal:

- Amplificateurs
- Portes logiques *en zone de transition*
- Sources d'alimentation lors de l'analyse de la stabilite vis-à-vis des perturbations
- En général, toute étude de la sensibilité aux perturbation se fait en régime petit signal.
- Analyse de stabilité

Analyse en régime de petit signal.

Soit un dipôle non-linéaire, dont la relation courant-tension est donnée par une fonciton $f(\cdot)$:

$$V = f(I) \tag{16}$$

La méthode est basée sur le développement limitée en série de Taylor. On suppose que le courant I est presque constant, de valeur moyenne I_0, et que de faibles variations i du courant existent, superposées sur I_0:

$$I = I_0 + i \tag{17}$$

Dans ce cas, la tension peut s'écrire:

$$V = f(I) \approx f(I_0) + i\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}I}\Big|_{I=I_0} \tag{18}$$

En nommant $f(I_0) = V_0$ et $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}I} = r$, on obtient pour la tension:

$$V = V_0 + i \cdot r \tag{19}$$

Analyse en régime de petit signal.

Ainsi, le dipôle non-linéaire est modélisé par :
– une source de tension continue V_0 qui est fonction du courant I_O, $V_0 = f(I_0)$
– Une résistance r.
Le couple V_0, I_0 s'appelle *point de polarisation* du dipôle non-linéaire, et le paramètre r *sa résistance petit signal*.
Si tous les dipôles non-linéaires sont représentés par ses circuits équivalents (source continue + résistance petit signal), on obtient un réseau linéaire, qui se modéliser par les méthodes bien maîtrisées.
De plus, généralement on ne s'intéresse que des petites variations; ainsi, en vertue du principe de superposition, on éteint toutes les sources continue.
Dans cette optique, un dipôle non-linéaire est modélisé tout simplement par sa résistance petit signal.