Cours 4. Circuits réactifs

Par Dimitri GALAYKO
Unité d'enseignement Élec-info
pour master ACSI à l'UPMC

Octobre-décembre 2005

1 Circuits RC élémentaires

1.1 Condensateurs dans les circuits de courant continu

Un circuit de courant continu perçoit un condensateur comme un circuit ouvert. En effet, un condensateur *est* un circuit ouvert : par définition, entre ses électrodes il n'y a pas de charges libres. Ainsi, un condensateur raccordé à n'importe quels deux nœuds n'affecte aucunement le fonctionnement du circuit, comme c'est présenté figure 1. Ici, la tension aux bornes du condensateur C est égale à la tension sur le résistor R3, celle-là étant calculée sans tenir compte du condensateur (*cf.* le cours 1).

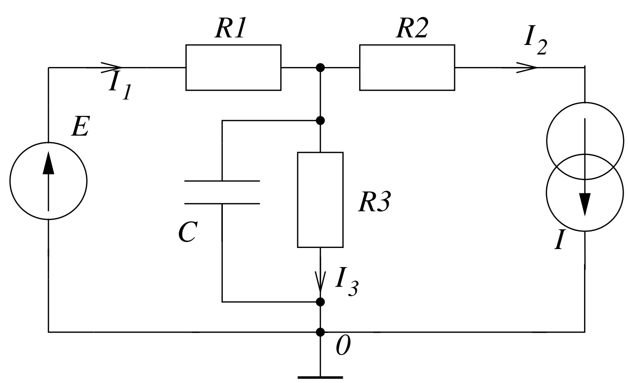


FIG. 1 – Circuit résistif étudié dans le cours 1, dans lequel on a introduit un condensateur : tous les calculs restent valables.

Cependant, dans la mesure où il existe une tension entre les électrodes du condensateur C (la tension U_{R3}), chacune de ses électrodes accumule une charge dont la valeur absolue est donnée par $Q = CU_{R3}$.

Le circuit reste dans cet état d'équilibre tant que les sources d'énergie indépendantes génèrent des tensions et des courants constants. Or, si les grandeurs générées par les sources évoluent dans le temps, ou si survient une modification de la topologie du circuit (par exemple, une rupture d'une connexion, un court-circuit entre deux nœuds, une adjonction d'une branche...), les condensateurs du circuit jouent un rôle déterminant dans les phénomènes qui se produisent après ce changement.

1.2 Circuit RC élémentaire : décharge d'un condensateur

Nous proposons d'étudier le circuit donné par la figure 2.

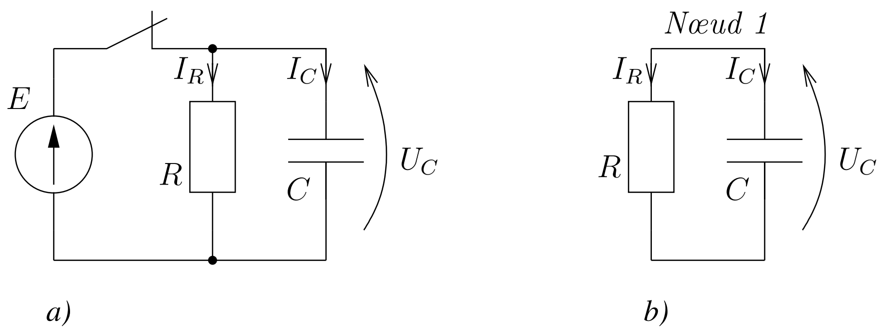


FIG. 2 – Circuit illustrant le phénomène de décharge d'un condensateur branché sur un résistor. a) Circuit complet : à $t < 0$ l'interrupteur est fermé (passant), c'est donc un circuit de courant continu classique. L'interrupteur est ouvert à partir de $t = 0$. b) Le circuit après la commutation : la source est exclue du circuit.

Supposons que l'interrupteur est fermé (passant) pour $t < 0$. Ainsi, le circuit fonctionne en régime de courant continu : pour son analyse le condensateur peut être négligé. Ainsi, le courant dans le résistor est de E/R, la tension sur le résistor et de E. Le condensateur est donc chargé à E.

À $t = 0$ l'interrupteur s'ouvre. La source est déconnectée du reste du circuit. Comment évolue la charge du condensateur ?

Aucune source d'énergie extérieure ne maintient une polarisation : les charges opposées des électrodes de la capacité cherchent donc à se réunir et à se compenser. Pour cela elles doivent passer par le résistor, car c'est le seul chemin entre les électrodes où les charges libres peuvent se déplacer.

Si la résistance du résistor était nulle, la décharge serait instantanée. Or un flux de charges est un courant ; l'intensité du courant d'un résistor est déterminée par la tension. Cette tension à l'instant qui suit la commutation (nous l'appellerons $t = 0+$) est égale à E. Ainsi, le courant de la résistance, qui est également le courant de décharge du condensateur, vaut E/R à l'instant $t = 0+$. Par définition, ce courant est la vitesse avec laquelle évolue la charge du condensateur. Ainsi, cette évolution (la décharge) ne peut pas être instantanée.

Que se passe-t-il lorsque $t > 0$? Au fur et à mesure que le condensateur se décharge, sa tension diminue ($Q = CU$). Ainsi, le courant dans la résistance diminue également, en faisant diminuer à son tour la vitesse de la décharge.

> *La vitesse de la décharge est proportionnelle à la charge du condensateur.*

Cette constatation permet de dire que la loi d'évolution de la charge est exponentielle.

Décrivons ce processus par les équations mathématiques.

Le courant de la résistance est égal à :

$$i_R = \frac{u_C}{R} = \frac{q_C}{RC}. \tag{1}$$

En même temps, le courant du résistor est égal au courant du condensateur pris avec un signe moins (la loi des nœuds) , ce dernier étant égal à la vitesse d'évolution de la charge :

$$i_R = -i_C = -\frac{dq_C}{dt}. \tag{2}$$

En réunissant les équations (1) et (2) nous obtenons :

$$\frac{1}{RC} q_C = -\frac{dq_C}{dt}. \tag{3}$$

C'est une équation différentielle linéaire et homogène du premier ordre[1]. De l'analyse mathématique il est connu que sa solution générale s'écrit comme suit :

$$q_C(t) = Q_0 \exp(-\frac{1}{RC}t), \tag{4}$$

où Q_0 est une constante définie par les conditions initiales.

[1] Nous rappellerons les notions sur les équations différentielles linéaires dans le cours suivant.

Pour déterminer Q_0, il faut utiliser la connaissance sur l'état du circuit à l'instant initial , *i.e.* à l'instant $t = 0+$. Nous savons qu'à $t = 0+$ la charge Q vaut :

$$Q|_{t=0+} = EC. \tag{5}$$

Ainsi,

$$Q|_{t=0+} = Q_0 \exp(-\frac{1}{RC}0) = Q_0 = EC. \tag{6}$$

Q_0 est alors la charge initiale du condensateur.

Ainsi, la solution particulière de l'équation (3) est :

$$q(t) = Q_0 \exp(-\frac{1}{RC}t). \tag{7}$$

Le produit RC s'appelle *la constante de temps du circuit*, il est désigné par la lettre τ :

$$\tau = RC. \tag{8}$$

C'est donc l'intervalle de temps en lequel la charge perd e fois sa valeur initiale. Donc, en 2τ la charge diminue en e^2, etc.

La tension et le courant évoluent selon la même loi :

$$u_C = u_R = \frac{q_C}{C} = E \exp(-\frac{t}{RC}), \tag{9}$$

et

$$i_C = \frac{\mathrm{d}q_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{E}{R} \exp(-\frac{t}{RC}). \tag{10}$$

La figure 3 présente le graphique de la loi d'évolution de la charge, de la tension et du courant dans le condensateur.

Le fait que le courant soit négatif signifie que la charge du condensateur diminue. Ainsi, *le sens conventionnel positif du courant de condensateur est défini de sorte à ce qu'un courant d'intensité positive charge le condensateur.*

Toutes les grandeurs du circuit tendent vers zéro d'une manière asymptotique, selon la loi exponentielle (donc très rapidement). Ainsi, en pratique, passé un temps suffisamment grand, toutes les grandeurs du circuit peuvent être considérées nulles.

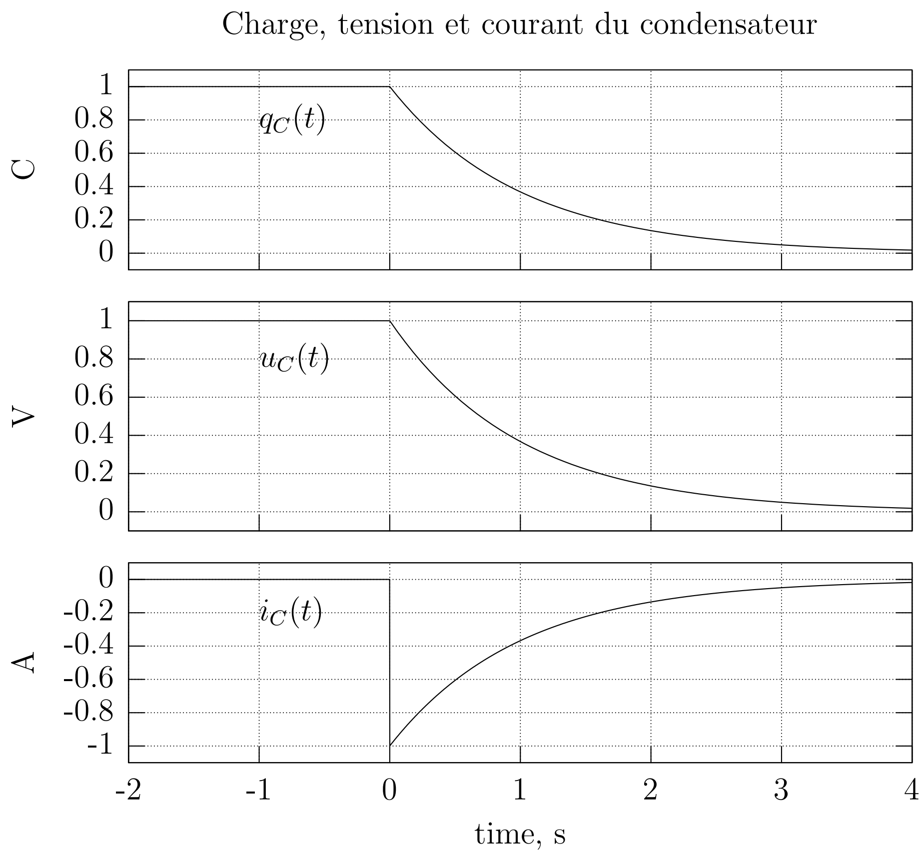


FIG. 3 – Évolution des grandeurs associées au condensateur lorsque celui-ci se décharge : $E_0 = 1V$, $C = 1F$, $R = 1\Omega$.

1.3 Définition du courant dans un condensateur

L'exemple que nous avons étudié pose un problème fondamental, celui du courant associé à un condensateur. En effet, nous avons vu que le courant i_R du résistor était non-nul ; or d'après la loi des nœuds appliquée au nœud 1, ce courant est le même que celui du condensateur. Or nous savons que physiquement, un condensateur est un circuit ouvert et que les charges libres ne peuvent pas se déplacer entre ses deux électrodes.

Dans le cours 2 nous avons expliqué ce qui se passerait dans un circuit si la loi des nœuds n'était pas respectée : on observerait une polarisation du circuit, *i.e.* une accumulation des charges de valeurs égales mais de signes opposés dans deux nœuds. C'est exactement ce qui se produit lors d'une décharge d'un condensateur. Ainsi le courant i_C découle de l'électrode du condensateur chargée positivement (nœud 1), en faisant baisser la charge de cette électrode. Le même processus mais dans le sens inverse se produit sur l'électrode chargée négativement. Ainsi, lorsqu'un courant *décharge* un condensateur, sa polarisation diminue, ce qui équivaut à une augmentation de polarisation, au signe près.

Cependant, ces « anomalies »se produisent localement et sont associées aux électrodes du condensateur. Au niveau global, le courant entrant dans une électrode est égal au courant sortant de l'autre. Ainsi, les circuits extérieurs perçoivent le courant d'un condensateur comme un unique flux de la charge. Ainsi,

> *on considère qu'un condensateur laisse passer un courant. L'intensité de ce courant est égale à la vitesse d'évolution de la charge sur ses électrodes. L'intensité est nulle si la charge ne varie pas dans le temps.*

Néanmoins, pour homogénéiser la formulation des lois et les équations, l'électricité classique définit *un courant de déplacement* : c'est un courant lié non pas à un déplacement de charges (comme le classique *courant de conduction*) mais à un champ électrique variable dans le temps. Il est orienté le long des lignes du champ. Ainsi, dans un condensateur parcouru par un courant, la polarisation et donc le champ électrique évolue dans le temps, on dit alors qu'entre ses électrodes il existe un *courant de déplacement* proportionnel à la vitesse d'évolution du champ électrique. Les lignes de ce courant prolongent les lignes du courant de conduction qui amène les charges à ses électrodes.

La notion du courant de déplacement permet de considérer le courant électrique comme étant discontinu, comme c'est illustré figure 4.

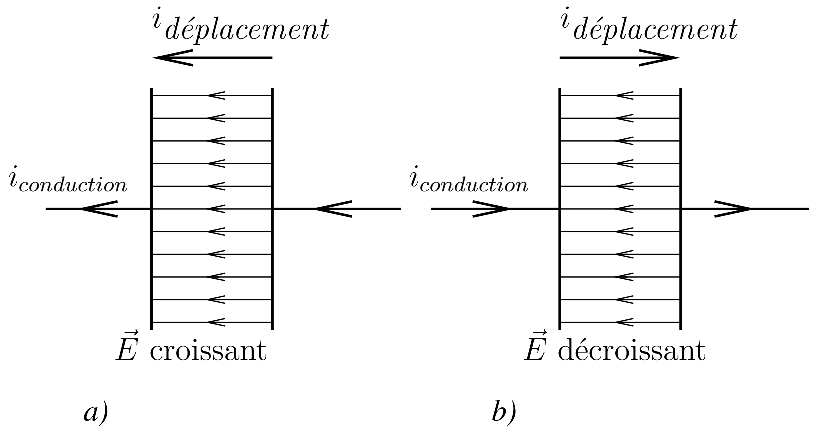


FIG. 4 – Courant de déplacement dans un condensateur : le sens du courant dépend de la dérivée du vecteur de champ électrique entre les électrodes. a) le condensateur se charge, b) le condensateur se décharge.

1.4 Circuits RC élémentaires : charge d'un condensateur

Considérons un circuit légèrement différent (figure 5).

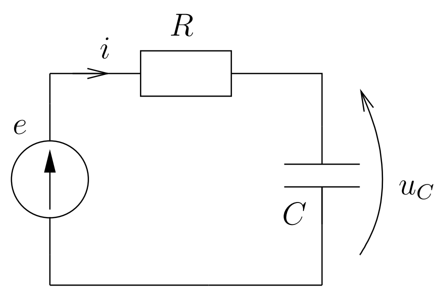


FIG. 5 – Circuit illustrant le phénomène de charge d'un condensateur branché dans un circuit contenant un résistor et une source de tension.

Soit à $t < 0$ la source e génère une tension selon la loi :

$$e(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ E_0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{11}$$

Cette source est connectée à un circuit RC série.

À $t < 0$, le circuit est passif et de courant continu. Donc, tous les grandeurs sont nulles, le condensateur est déchargé.

A l'instant $t = 0+$ la source génère une tension E_0. Le condensateur étant déchargé, sa tension reste nulle. Ainsi, la tension sur le résistor R étant E, le courant dans le circuit vaut :

$$i|_{t=0+} = \frac{E}{R} \tag{12}$$

Ce courant amène des charges positives sur une électrode du condensateur et en retire de l'autre. Ainsi le condensateur se charge. Sa tension augmente en même temps que sa charge, et la tension sur le résistor, étant égale à $E_0 - u_C$, diminue en faisant baisser le courant, donc la vitesse d'accumulation de charge. Ainsi,

$$i_C = \frac{\mathrm{d}q_C}{\mathrm{d}t} = \frac{E_0 - u_C}{R}. \tag{13}$$

Or la tension u_C est proportionnelle à la charge du condensateur ($u_C = q_C/C$). Nous avons alors :

$$R\frac{\mathrm{d}q_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q_C = E_0. \tag{14}$$

C'est une équation différentielle linéaire non-homogène. Sa solution générale est donnée par :

$$q_C(t) = E_0C(1 - \exp(-\frac{t}{RC})). \tag{15}$$

La tension sur le condensateur est proportionnelle à sa charge :

$$u_C = \frac{q_C}{C} = E_0(1 - \exp(-\frac{t}{RC})). \tag{16}$$

Le courant dans le condensateur est égal à la dérivée de la charge. Ainsi,

$$i_C = \frac{\mathrm{d}q_C}{\mathrm{d}t} = \frac{E_0}{R}\exp(-\frac{t}{RC}). \tag{17}$$

La figure 6 présente le graphique d'évolution de la charge, de la tension et du courant du condensateur.

On constate que la loi d'évolution de la charge et donc de la tension sur le condensateur est décrite par une fonction continue, alors que le courant dans le circuit subit une discontinuité à $t = 0$.

Le circuit de la figure 5 se rencontre très souvent lors de l'analyse des circuits et systèmes réels. En effet, il modélise l'accès à une borne d'entrée d'un

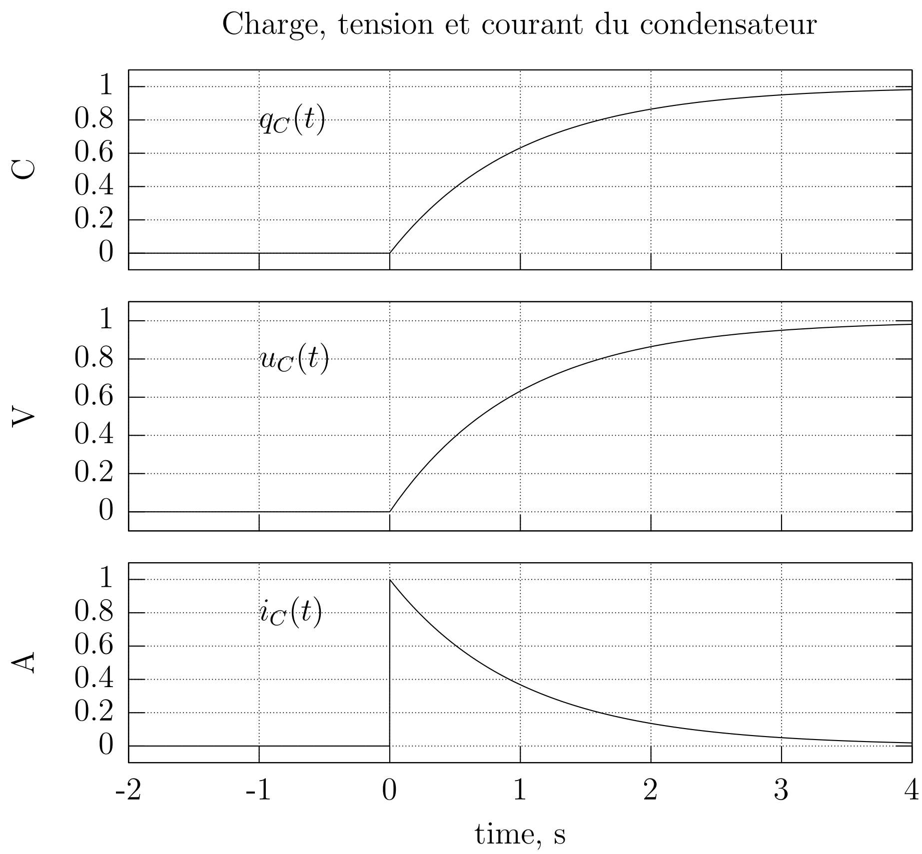


FIG. 6 – Évolution des grandeurs associées au condensateur lorsque celui-ci se charge : $E_0 = 1V$, $C = 1F$, $R = 1\Omega$.

bloc électronique. Le condensateur modélise la capacité d'entrée, le résistor modélise la résistance des fils de connexion, la source modélise le générateur de tension. On voit, que la tension sur la capacité (donc sur l'entrée) s'établie avec un retard par rapport à la consigne de la source. C'est un des principaux phénomènes limitant la vitesse des circuits numériques.

À cause du temps nécessaire pour modifier l'état d'un condensateur, on dit que celui-ci est un élément *réactif*. Les circuits utilisant les condensateurs s'appellent donc les circuits réactifs.

2 Inductance

Dans ce paragraphe nous introduisons un autre élément réactif qui est en quelque sorte symétrique, dual au condensateur. Il s'agit de l'inductance, un élément idéal qui modélise l'induction magnétique. Nous commençons ce paragraphe par rappeler la physique de ce phénomène. Sa description complète dépasse les objectifs du module. Nous recommandons aux intéressés de consulter des ouvrages sur les bases de l'électricité physique.

2.1 Phénomène de l'induction magnétique

Les phénomènes magnétiques sont des effets rélativistes liés au champ électrique.

Il existe deux sources de champ électrique, qui, en réalité, ne font qu'une :

1. Charges en mouvement (courants de conduction)
2. Champs électriques variables

Du paragraphe précédent nous savons qu'à un champ électrique variable on associe le phénomène de courant de déplacement pouvant être assimilé à un courant de conduction.

Ainsi, en généralisant, on peut dire qu'*un champ magnétique est créé par des courants électriques*.

D'une manière similaire avec un champ électrique, un champ magnétique est caractérisé par un vecteur de champ et est représenté par les lignes de champ.

Un fil infiniment long traversé par un courant électrique génère un champ magnétique de symétrie cylindrique, *i.e.* les lignes de champ forment des cercles concentriques autour de l'axe du courant (figure 7).

Une des lois fondamentales de l'électromagnétisme permet de calculer le champ magnétique créé par des courants. Elle s'appelle *le théorème d'Ampère* et joue, pour le champ magnétique, le même rôle que joue la loi de Gauss pour le champ électrique.

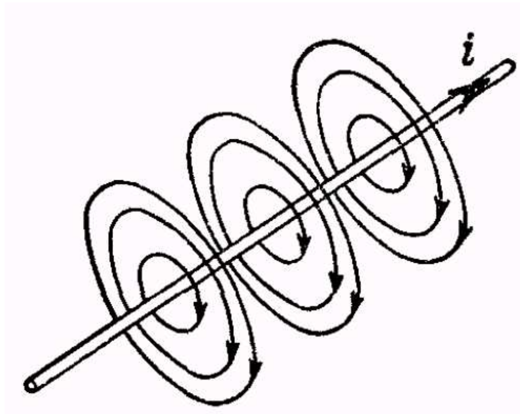


FIG. 7 – Champ magnétique créé par un courant circulant dans un fil droit.

Elle est formulée ainsi.

> *Soit S est une quelconque surface s'appuyant sur un contour fermé L (figure 8). L'intégrale curviligne du vecteur de champ magnétique le long de ce contours est égale à la somme de touts les courant traversant la surface, divisée par $\varepsilon_0 c^2$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide.*

$$\oint_S \vec{B}\mathrm{d}\vec{l} = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{\textit{touts les}\\ \textit{courants}\\ \textit{traversant } S}} I_i}{\varepsilon_0 c^2} \tag{18}$$

Une intégrale curviligne se calcule de la même manière qu'une intégrale de surface : c'est la somme des produits scalaires entre le vecteur du champ et le vecteur d'un infinitésimal tronçon de parcours. La somme est calculée le long de tous le parcours. Dans chaque point le vecteur du parcours $\mathrm{d}\vec{l}$ est colinéaire à la tangente de la ligne du contour.

Ce théorème permet de calculer le champ magnétique crée par une distribution des courants.

Un autre théorème fondamental définit un lien entre le champ magnétique et le champ électrique. Il s'agit de la loi de Faraday, par le nom du scientifique français qui l'a découverte expérimentalement. Cette loi postule qu'un champ magnétique variable crée un champ électrique.

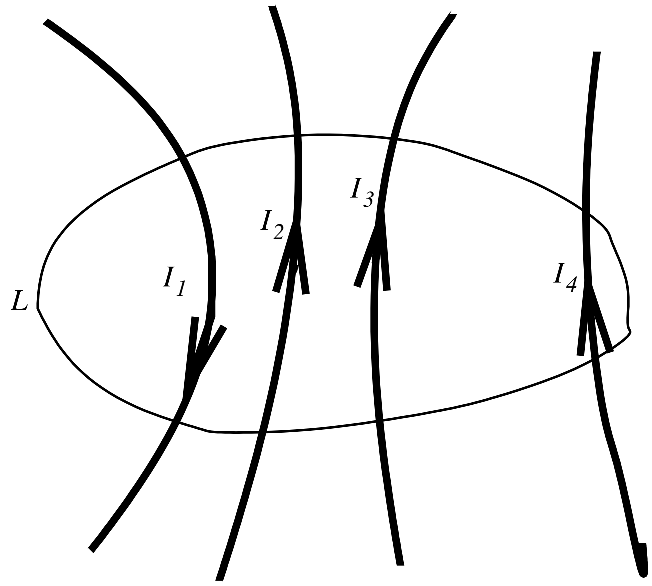


FIG. 8 – Contexte d'application de la loi d'Ampère : un contour fermé, les courants qu'il encercle.

Soit une surface S s'appuyant sur un contour fermé L. La vitesse d'évolution du flux du vecteur de champ magnétique à travers cette surface, prise avec un signe moins, est égale à l'intégrale curviligne du vecteur de champ électrique calculée le long du contour.

$$\oint_L \vec{E}\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_S}{\mathrm{d}t}. \tag{19}$$

Notez que l'existence d'un fil conducteur le long du contour n'est pas obligatoire. S'il n'y en a pas, un champ électrique est créé dans le vide. Par contre, s'il y a un circuit fermé contenant des charges libres, ce champ met les charges en mouvement, *i.e.* crée un courant.

La variation du flux de champ magnétique peut être due aux différents phénomènes. Par exemple, une rotation d'un contour électrique dans un champ magnétique statique provoque une modification du flux à travers ce contour : c'est le principe de fonctionnement des générateurs électriques. Or, un champ électrique et donc un courant peuvent également être créés dans un circuit fermé géométriquement fixe, si le flux magnétique extérieur varie.

Le courant créé ainsi s'appelle *courant d'induction magnétique.*

Résumons ces deux lois. La loi d'Ampère énonce qu'un champ électrique variable (courant de déplacement) génère un champ magnétique. Or la loi de

Faraday postule qu'un champ magnétique variable génère un champ électrique. Ce sont ces lois qui rendent possible l'existence des ondes électromagnétiques dans le vide, et donc les radiocommunications.

Le signe moins dans l'équation de la loi de Faraday est une expression de la loi de conservation de l'énergie. Il signifie que le champ électrique induit par un champ magnétique variable crée à son tour un champ magnétique tel qu'il s'oppose à la variation du champ magnétique primaire. Si ce n'était pas le cas, le champ électromagnétique total et donc son énergie ne cesserait de croître en atteignant des valeurs infinies : un monde régi par une telle loi serait instable...

L'intégrale curviligne du vecteur de champ électrique induit $\vec{E}$ n'est rien d'autre que l'énergie que ce champ électrique transmet à une charge unitaire parcourant le contour sous action des forces de ce champ. En physique cette grandeur s'appelle *force électromotrice*, elle se mesure en mêmes unités que la tension électrique :

$$\mathscr{E} = \oint_L \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} \tag{20}$$

S'il y a des charges libres sur le contour, elles se mettent en mouvement en formant un courant. Ainsi, la variation de flux crée dans le contour une *source de tension distribuée* qui génère une tension égale à la force électromotrice prise avec un signe moins :

$$U = -\mathscr{E} \tag{21}$$

Ainsi, *un champ magnétique variable crée une force électromotrice et donc une tension le long du contour qu'il traverse.* :

$$U = -\mathscr{E} = -\oint_L \vec{E}\mathrm{d}\vec{s}. \tag{22}$$

Soit la résistance de contour égale à r, ainsi, le courant généré par le champ électrique induit vaut :

$$i_{induit} = \frac{U}{r}. \tag{23}$$

Le courant i est induit par un champ magnétique variable. Or d'après la loi d'Ampère, ce courant génère, à son tours, un champ magnétique qui lui, crée de nouveau un champ électrique dans le contour, et ainsi de suite. Notez qu'il ne s'agit pas de *transformation* d'un champ vers l'autre, mais une véritable *création* d'un champ par un autre. Pour cette raison, la loi de conservation de l'énergie veut que le champ magnétique créé par ce courant induit *soit orienté de manière à s'opposer à la variation qui a induit le courant* (*cf.* l'explication sur le signe moins dans la loi de Faraday). Ainsi, par exemple, si le champ magnétique primaire augmente, le courant induit par ce champ crée un champ magnétique opposé au champ primaire, de sorte à ralentir son augmentation.

Ainsi,

> *une variation de flux de champ génère une tension dans un circuit fermé traversé par ce flux. Cette tension génère un courant dont le champ magnétique s'oppose à la variation du flux.*

On peut ainsi dire que le courant induit est « ingrat », car son effet tend à annuler le phénomène qui l'a fait naître.

2.2 Phénomène d'autoinduction

Supposons que dans un circuit fermé circule un courant *i variable*, généré, par exemple, par une source de tension extérieure (figure 9). D'après la loi d'Ampère, ce courant génère un champ magnétique. Ce champ magnétique est variable. Par conséquent, d'après le théorème de Faraday, son flux génère une force électromotrice dans le circuit, donc il y induit une tension. Cette tension crée un courant qui se superpose au courant primaire généré par la source extérieure : le courant total circulant dans le circuit s'en trouve modifié.

Ainsi, un circuit fermé parcouru par un courant variable génère un champ magnétique qui produit un effet d'induction.

Ce phénomène s'appelle *autoinduction*, pour désigner qu'un effet magnétique a lieu sans présence d'un champ magnétique extérieur.

Un courant électrique et le flux magnétique qu'il génère se trouvent en une relation linéaire :

$$\Phi = Li. \tag{24}$$

Le facteur L s'appelle *inductance du circuit*. Ce paramètre dépend de la géométrie du circuit. L'inductance se mesure en *Henry* (H).

On comprend le sens du terme *inductance* si l'on considère le rapport entre le courant du circuit et la tension induite. D'après les formules (19) (20) et (21) nous avons :

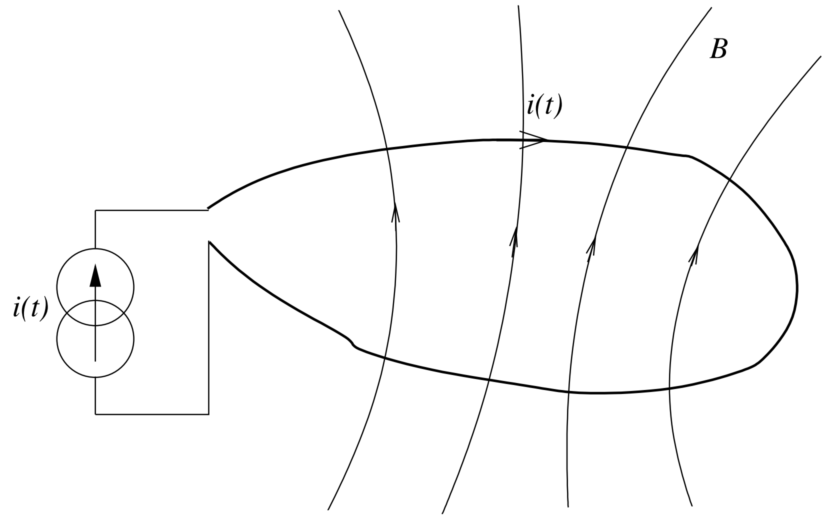


FIG. 9 – Contour fermé dans lequel circule un courant.

$$u = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{25}$$

Ainsi, *l'inductance est un facteur de proportionnalité entre la vitesse de variation du courant et la tension induite dans un circuit.*

> *Le phénomène d'autoinduction est lié aux courants variables dans le temps et dépend de la vitesse de leur variation. Par conséquent, l'autoinduction est est particulièrement significative dans les circuits où les signaux varient rapidement,* i.e. *dans les circuits de hautes fréquences.*

2.3 Inductance en tant qu'un élément électrique

Chaque conducteur a une inductance : dans la mesure où il laisse passer un courant, il génère un flux magnétique à travers le circuit dans lequel il circule (le chemin de circulation d'un courant est toujours fermé). Si le courant est variable, il y a une variation du flux à travers le circuit, donc le phénomène d'autoinduction.

L'inductance d'un simple fil est relativement faible ; elle est négligeable dans les circuits de basses fréquences (*i.e.* là où les courants varient lentement) et constitue un phénomène parasite dans les circuits de hautes fréquences.

Néanmoins, dans beaucoup de cas on souhaite utiliser les propriétés inductives pour réaliser une fonction de traitement particulière. Souvenons nous que la tension et le courant d'un condensateur sont reliés par la loi :

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}. \tag{26}$$

Donc, il pourrait être intéressant d'avoir à disposition un élément symétrique, « dual », dont la tension serait proportionnelle à la dérivée du courant. C'est précisément ce qui est offert par le phénomène d'autoinduction, comme le montre la formule (25).

On souhaite disposer d'un élément dans lequel le phénomène de l'autoinduction dominerait les autres phénomènes électriques.

Nous avons déjà évoqué un tel élément, c'est un conducteur enroulé en spire (figure 10a). Pour renforcer ses propriétés inductives, nous enroulons un conducteur n fois : ainsi les flux magnétiques créés par les n spires s'additionnent et pour le même courant i nous obtenons un flux n fois plus grand (figure 10b). Un tel élément s'appelle inductance, bobine ou, en utilisant un terme anglais, « self »(abréviation de *self-inductance*, autoinductance).

Son symbole est présenté figure 11.

C'est donc un élément dipôle caractérisé par son inductance L intervenant dans l'équation (25).

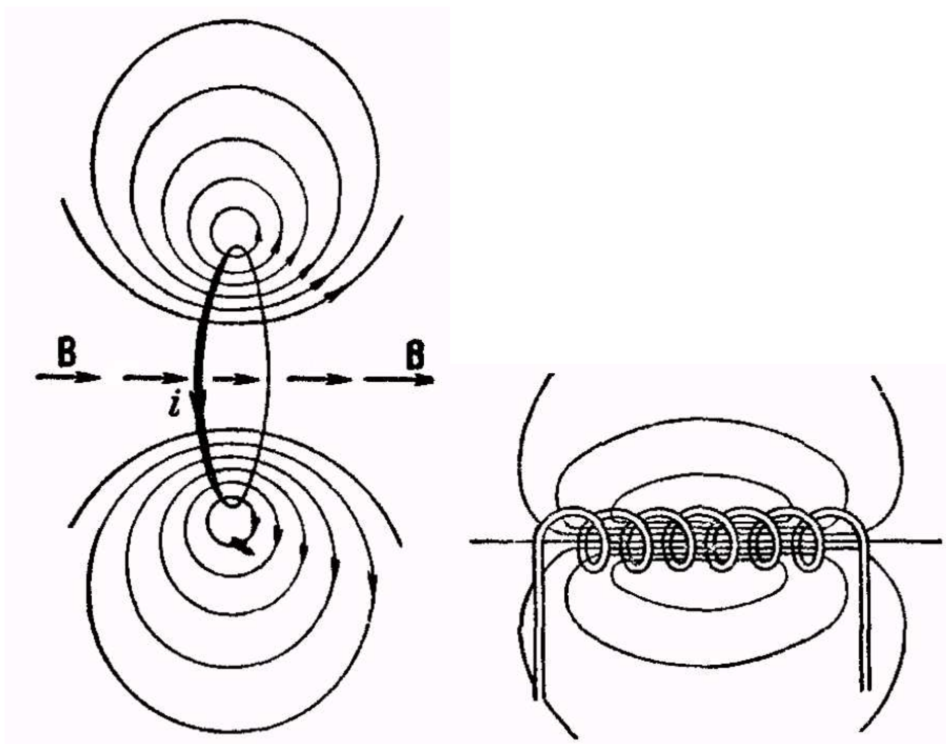
3 Circuits RL élémentaires

Nous allons maintenant étudier comment une inductance se comporte dans un circuit électrique. Nous verrons que les processus se déroulant dans les circuits inductifs sont très similaires aux ceux que nous avons observés dans les circuits capacitifs.

3.1 Inductance dans les circuits de courant continu

L'autoinduction ne se manifeste pas dans les circuits de courant continu : le courant traversant l'inductance et donc le flux magnétique sont constants dans le temps ; les dérivées de ces deux grandeurs sont donc nulles. Ainsi, le phénomène d'autoinduction ne se produit pas.

Physiquement une inductance est un simple tronçon de fil enroulé en spires. En électronique on suppose que celui-ci est fait à partir d'un conducteur parfait, *i.e.* sa résistance est nulle. Par conséquent, *dans un circuit de courant continu une inductance idéale se comporte comme un court-circuit.*



a) *b)*

Fig. 10 – Champ magnétique des conducteur dont la géométrie favorise le flux magnétique créé par un courant : a) une spire, b) une bobine.

Fig. 11 – Symbole de l'inductance.

Pour tracer une analogie avec la capacité, rappelons que dans les circuits de courant continu un condensateur idéal se comporte comme un circuit ouvert.

3.2 Décharge d'une inductance

Nous proposons d'étudier un circuit dual[2] au celui présenté au paragraphe 1.2 (figure 12). Ainsi, au lieu d'une connexion parallèle de trois éléments dans le circuit de la figure 2 nous avons une connexion série, une inductance au lieu du condensateur et une source de courant au lieu d'une source de tension.

Soit la source de courant I génère un courant constant. L'interrupteur est ouvert pour $t < 0$. C'est donc un circuit de courant continu. Le courant dans la résistance et dans l'inductance est égal à I, la tension sur l'inductance est nulle et la tension sur la résistance et sur la source valent IR.

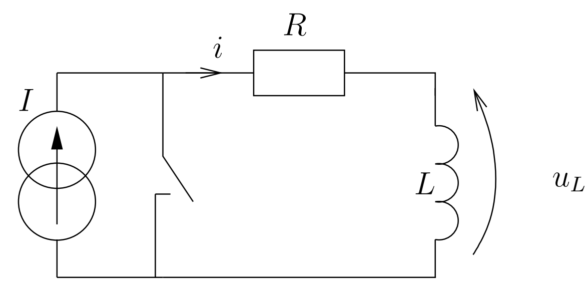


FIG. 12 – Circuit de décharge d'une inductance.

À l'instant $t = 0$ l'interrupteur se ferme. Le courant généré par la source suit le chemin de la résistance minimale et passe désormais par l'interrupteur et non plus par le circuit. La tension aux bornes de l'interrupteur étant nulle (c'est un court-circuit), la résistance et l'inductance branchées à la fois en parallèle et en série fonctionnent en autonomie par rapport à la source I.

Que se passe-t-il ensuite ? Il n'y a plus de source entretenant un courant dans les éléments R et L, celui-ci doit devenir nul. Or ceci ne peut pas se passer instantanément : cela voudrait dire que la dérivée du courant de l'inductance et donc sa tension sont infinies.

[2]En électronique deux circuits s'appellent duaux si les tensions dans l'un évoluent selon les mêmes lois mathématiques que les courants dans l'autre, et vice versa. Ainsi, une connexion série dans un circuit correspond à une connexion parallèle dans l'autre, un condensateur prend place d'une inductance, une source de courant prend place d'une source de tension etc...

Ainsi, le courant a tendance à baisser, mais son champ magnétique décroissant génère une tension et donc un courant induits de sorte à s'opposer à cette variation. Pour empêcher la diminution du flux, il faut empêcher la diminution du courant – donc le courant induit coule dans le même sens que le courant initial en renforçant ce dernier.

Pour ces raisons, la décroissance du courant n'est pas instantanée mais prend un certain temps.

Analysons maintenant le problème du point de vue des mathématiques. Rappelons, que d'après l'équation de l'inductance (25), la vitesse d'évolution du courant est proportionnelle à la tension sur les bornes de l'inductance. En même temps, l'inductance et la résistance sont connectés en série et en parallèle, ainsi elles subissent le même courant et la même tension (à part que le sens conventionnel positif de leurs tensions est tel que $u_L = -u_r$). Ainsi, c'est le courant dans l'inductance qui défini la tension sur la résistance et donc sa vitesse de décroissance.

De même que pour la tension sur le condensateur dans un circuit RC, la vitesse de décroissance de courant de l'inductance dans un circuit RL est proportionnelle au courant lui-même.

Traduisons ces raisonnements en langage des formules :

$$u_L = -u_r = -iR. \tag{27}$$

En utilisant (25) nous avons :

$$iR = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \tag{28}$$

ou

$$i\frac{R}{L} = -\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{29}$$

Comparez les équations (29) et (3) : elles sont identiques et elles ont la même solution. Le courant et le flux dans l'inductance évoluent selon la loi exponentielle :

$$i_L(t) = i_{L0}\exp(-\frac{R}{L}t), \tag{30}$$

où i_{L0} est le courant dans l'inductance à $t = 0+$. Ainsi, par analogie, on dit qu'une inductance *se charge en courant électrique*, et que *les variations du* *courant,* i.e. *les processus de charge et de décharge, ne peuvent pas se produire instantanément.*

La figure 13 présente les graphiques d'évolution du courant et de la tension dans l'inductance. On voit que l'évolution du courant est décrite par une fonction continue, tandis que la courbe de la tension présente une discontinuité à $t = 0$.

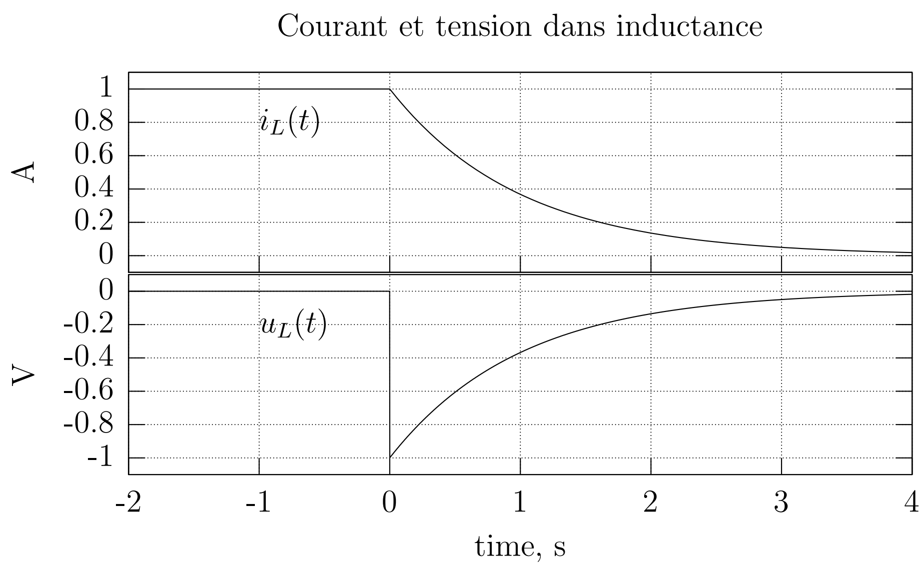


FIG. 13 – Évolution du courant et de la tension dans une inductance qui se décharge sur une résistance : $I_0 = 1A$, $L = 1H$, $R = 1\Omega$.

On trace facilement une parallèle avec le circuit de décharge d'une capacité (figure 2), où le graphique de la tension est continu, le courant passant de 0 à E/R à $t = 0$.

3.2.1 Circuit de charge de l'inductance

Considérons le circuit présenté figure 14, dual au circuit de la figure 5. Soit l'intensité du courant générée par la source obéit à la loi :

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ I_0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{31}$$

Ainsi, à $t < 0$, le courant dans le circuit est nul, $i_L = i_R = 0$. À $t = 0+$, la source commence à générer un courant d'intensité I_0. Cependant, à cet instant le courant dans l'inductance est toujours nul, car sinon à $t = 0$ la

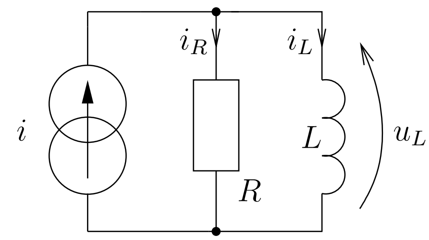


FIG. 14 – Circuit de charge d'une inductance.

dérivée du courant et donc la tension sur l'inductance seraient infinies. Ainsi, à $t = 0+$ tout le courant passe par la résistance (loi des nœuds) en générant une tension $I_0 R$. Cette tension s'applique à l'inductance (qui est raccordée en parallèle avec la résistance), et donc impose une évolution du courant dans l'inductance ($\mathrm{d}i_L/\mathrm{d}t = u_L/L$).

Pendant que le courant dans l'inductance augmente, le courant dans la résistance baisse (toujours la loi des nœuds). Ainsi, la vitesse de croissance du courant dans l'inductance baisse aussi. Nous avons donc l'équation suivante :

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = u_R = (I_0 - i_L)R. \tag{32}$$

En transformant cette équation, nous obtenons :

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + i_L = I_0. \tag{33}$$

En reécrivant cette équation sous la forme

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L}i_L = \frac{1}{L}I_0, \tag{34}$$

on s'aperçoit qu'elle est équivalente à l'équation (14) et possède une solution du même type :

$$i_L(t) = I_0(1 - \exp(-\frac{R}{L}t)). \tag{35}$$

(Vérifiez que (35) est une solution de l'équation (33)).

Notez que de même que le facteur constant de l'équation (15) est égale à la charge du condensateur à $t = \infty$, le facteur de l'équation (35) est égale au courant qui s'établit dans l'inductance lorsque la fonction exponentielle devient infiniment petite. La figure 15 présente les graphiques d'évolution du courant et de la tension associés à l'inductance. Le courant dans l'inductance est décrit par une fonction continue, alors que sa tension passe de zéro à IR à l'instant $t = 0$.

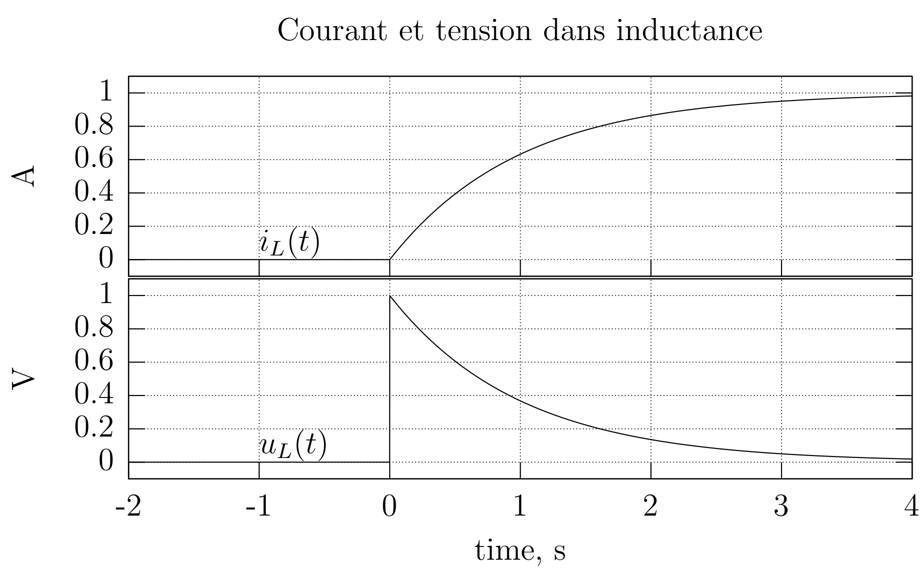


FIG. 15 – Évolution du courant et de la tension dans une inductance en train de se charger : $I_0 = 1A$, $L = 1H$, $R = 1\Omega$.