Cours 5. Étude des régimes transitoires des circuits réactifs

Par Dimitri GALAYKO
Unité d'enseignement Élec-info
pour master ACSI à l'UPMC

Octobre-décembre 2005

Dans ce cours nous nous présentons une méthode générale pour l'analyse des circuits réactifs. Cette méthode est basée sur la résolution des équations différentielles décrivant le système.

1 Origine des processus transitoires

En analysant les résultats obtenus à partir des considération physiques sur les inductances et les capacités, nous pouvons nous poser une question générale : pourquoi toute modification de la charge de capacité et toute modification du courant d'inductance prend du temps, alors que, par exemple, les modifications des grandeurs d'une résistance, du courant de condensateur et de la tension d'inductance peuvent être instantanées ?

La réponse à cette question peut être donnée en considérant l'évolution de l'état énergétique d'un circuit contenant des éléments réactifs.

1.1 Énergie des éléments réactifs

Un condensateur chargé emmagasine un champ électrique entre ses électrodes. Nous savons qu'un champ électrique possède une énergie : c'est l'énergie potentielle des charges qui créent ce champ, *i.e.* l'énergie des charges du condensateur. Sans démonstration nous donnons ici l'expression de cette énergie en fonction de la tension ou de la charge du condensateur :

$$W_C = \frac{CU_C^2}{2} = \frac{Q_C^2}{2C}. \tag{1}$$

Une bobine par laquelle passe un courant I_L emmagasine un champ magnétique à l'intérieur de ses spires. Sans démonstration (et en s'appuyant sur la dualité « capacité-inductance ») nous avançons que le champ magnétique d'une inductance possède également une énergie qui vaut :

$$W_L = \frac{LI_L^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}. \tag{2}$$

Du point de vue énergétique, la différence entre une résistance et les éléments réactifs est fondamentale.

Une résistance *dissipe* l'énergie électrique : elle la convertit en chaleur, de sorte que l'énergie quitte le circuit. Ce processus est irréversible : l'énergie dissipée est perdue (on parle souvent des *pertes* dans une résistance). Une transformation ne signifie pas une accumulation ; on peut donc considérer qu'une résistance est un simple convertisseur de l'énergie électrique en énergie thermique.

Un élément réactif, en revanche, ne peut pas dissiper l'énergie qui lui est transmise par le circuit : cette énergie est *accumulée* dans le champ électrique ou magnétique de l'élément, et peut être *rendue* au circuit. Par exemple, dans un circuit composé d'une inductance et d'un condensateur idéaux, l'énergie totale reste constante et se transforme en permanence de l'énergie du champ électrique en énergie du champ magnétique, en produisant ainsi des *oscillations électromagnétiques*. Si le circuit ne contient pas de résistances, ces oscillations ne s'arrêtent jamais car l'énergie ne peut pas quitter le circuit. En revanche, en présence d'une résistance ne serait-ce que de très faible valeur, l'énergie du circuit diminue jusqu'à zéro en suivant la loi exponentielle, comme nous l'avons observé dans le cas des circuits RL et RC.

Ainsi, on parle d'un élément réactif en régime de récepteur, *i.e.* lorsqu'il est en train d'accumuler une énergie, et du régime générateur, lorsqu'il rend une énergie au circuit. Selon la définition des récepteurs et des générateurs donnée dans le cours 3, le régime dépend du sens du courant par rapport à la tension. Le sens conventionnel positif de courants et des tensions dans les éléments réactif est toujours défini en régime récepteur, *i.e.* le courant coule du potentiel plus haut vers le potentiel plus bas, comme c'est indiqué figure 1.

1.2 Évolution de l'énergie des éléments réactifs

Un des postulats fondamentaux de la physique classique énonce que l'énergie contenue dans une zone de l'espace ne peut pas évoluer d'une manière discontinue, *i.e.* changer sa valeur instantanément. Il est facile de comprendre

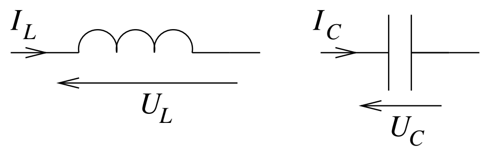

FIG. 1 – Sens positif conventionnel des courants et des tensions dans les éléments réactifs.

l'origine de cette interdiction. En effet, sachant que l'énergie se conserve, une variation d'énergie n'est ni une disparition, ni une création, mais un échange avec une autre zone de l'espace. Or, comme l'énergie est une matière, celle-ci ne peut pas se déplacer instantanément.

Ainsi,

> *l'état énergétique des inductances et des capacités ne peut pas être modifié instantanément.*

Par conséquent, cette même contrainte de continuité est imposée aux grandeurs électriques définissant l'état énergétique de ces éléments, notamment, à la tension et à la charge pour une capacité et au courant et au flux pour une inductance.

> *La tension sur un condensateur et le courant dans une inductance ne peuvent pas être discontinus, dans la mesure où ces grandeurs définissent l'état énergétique de ces éléments.*

En revanche, comme une résistance n'accumule pas d'énergie, les lois d'évolution de son courant et de sa tension peuvent afficher des discontinuités. Il en va de même pour la tension sur l'inductance et pour le courant de la capacité, car ils ne sont pas liés à l'état énergétique.

1.3 Interprétation énergétique des processus transitoires

Ces connaissances permettent d'avancer une interprétation fondamentale des processus transitoires dans les circuits réactifs.

Soit un circuit réactif dans lequel agissent des sources de tension et de courant. Pour l'instant nous considérons que les courants et les tensions des sources sont continus ; plus tard nous allons voir que l'explication qui va suivre est aussi valable si les sources sont sinusoïdales.

Soit à l'étape pré-initiale ($t < 0$) le circuit se trouve dans un équilibre, *i.e.* toutes les tensions et les courants sont continus.

Soit à l'instant $t = 0$ le circuit subit une modification. Cela peut être soit un changement du régime d'une ou de plusieurs sources d'énergie – par exemple la modification de la tension générée par une source, soit une modification de la topologie du circuit – par exemple, une adjonction ou une suppression d'une branche.

En principe, le premier changement est équivalent au second, car toute modification du régime d'une source peut être assimilée à une modification de la topologie du circuit (*cf.* un exemple à la figure 2). Une modification de la topologie s'effectue à l'aide des *interrupteurs.* Pour cette raison le moment où le circuit change sa topologie s'appelle « moment de commutation ».

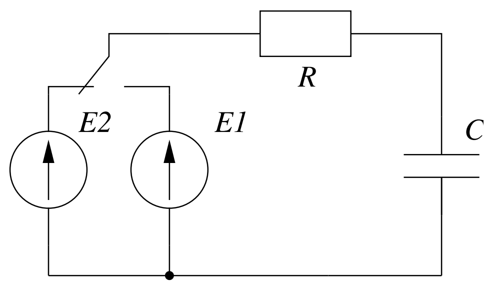

FIG. 2 – Une modification de la tension générée par une source assimilée à une commutation.

Pour savoir si une commutation se produisant à $t = 0$ engendre un processus transitoire semblable à ceux que nous avons étudiés dans le cours 4, il faut comparer l'état d'équilibre du circuit avant ($t < 0$) et longtemps après la commutation, *i.e.* à $t = +\infty$ (car nous savons que les processus transitoires s'éteignent avec le temps[1]). Au temps infini le circuit doit retrouver un nouvel équilibre en régime de courant continu.

Si l'on constate une différence entre les états énergétiques des éléments réactifs, un processus transitoire a lieu.

> *Un processus transitoire est une évolution de l'état énergétique des éléments réactifs du circuit.*

La figure 3 illustre ce principe. Elle présente deux circuits où une commutation se produit à $t = 0$. Or seulement dans le circuit de la figure 3a un processus transitoire a lieu. Pour s'en assurer, il suffit d'analyser l'état d'équilibre des deux circuits avant et après la commutation.

Une fois renseigné sur l'existence d'un processus transitoire, il faut analyser le circuit afin de trouver les fonction d'évolution des tensions et des courant dans le circuit. Pour cela on établit une ou des équations différentielles décrivant le circuit *après* la commutation.

[1]sous réserve de présence des éléments dissipatifs, *i.e.* des résistances.

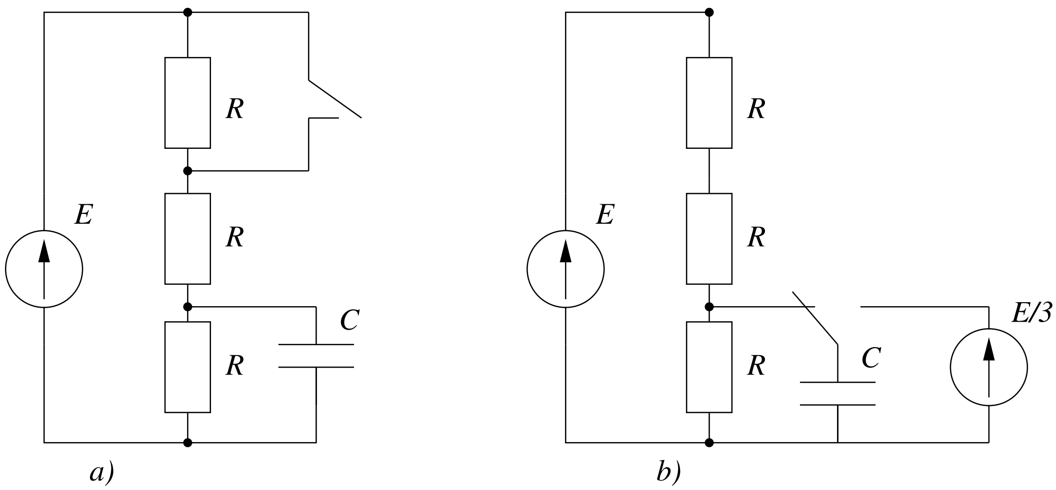

FIG. 3 – a) circuit où un processus transitoire a lieu car la tension sur le condensateur doit passer de $E/3$ à $E/2$ lorsque l'interrupteur se ferme, b) circuit où, après que l'interrupteur change sa position, la tension du condensateur reste $E/3$, donc il n'y a pas de processus transitoire.

Dans le chapitre suivant nous présentons la technique générale de l'analyse des processus transitoires dans les circuits électriques linéaires.

2 Analyse des processus transitoires

En régime transitoire, les tensions et les courants du circuit évoluent dans le temps – pour trouver les lois d'évolution, il faut établir et résoudre les équations différentielles qui décrivent le système.

2.1 Établissement d'un système d'équations différentielles pour un circuit

Pour établir les équations décrivant l'évolution des grandeurs inconnues, on utilise la même approche que dans le cas des circuits de courant continu. On applique la loi des mailles et la loi des nœuds, aussi bien que les relations qui relient les courants et les tension des éléments. Dans le cas des circuits réactifs, ces relations sont, en général, de nature différentielle. Résumons les :

– Pour une résistance :

$$u_R = Ri_R; \tag{3}$$

– Pour une capacité :

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}; \qquad (4)$$

– Pour une inductance

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}. \qquad (5)$$

Nous présentons un exemple d'établissement des équations différentielles pour le circuit de la figure 4. Nous souhaitons trouver la loi d'évolution de la tension sur le condensateur C.

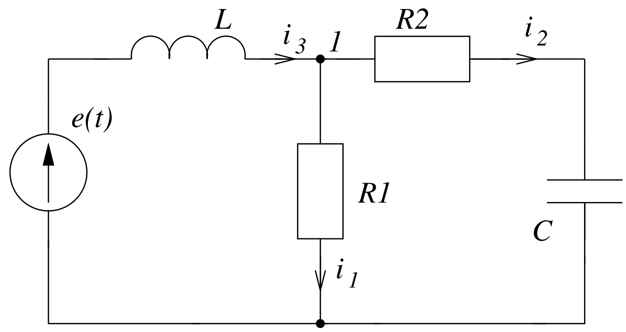

FIG. 4 – Circuit réactif.

Pour ce circuit nous pouvons écrire trois équations : deux pour les deux mailles, une pour un des deux nœuds.

Pour le nœud 1 :

$$i_3 = i_1 + i_2. \qquad (6)$$

Pour la maille e-L-R1 :

$$u_L + u_{R1} = e(t), \qquad (7)$$

ou

$$L\frac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + R_1 i_1 = e(t). \qquad (8)$$

Pour la maille R1-C-R2 :

$$u_C + R_2 i_2 - R_1 i_1 = 0, \qquad (9)$$

Les équations (6), (8) et (9) ont quatre inconnues. On peut en exclure i_2 car $i_2 = C\mathrm{d}u_C/\mathrm{d}t$. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{c} i_3 = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + i_1 \\ L\dfrac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + R_1 i_1 = e(t) \\ u_C + R_2 C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} - R_1 i_1 = 0 \end{array}\right. . \tag{10}$$

La technique de la résolution de ce système est la même que celle utilisée pour un système d'équations algébriques. On exclut les inconnues, une par une, en ne laissant dans l'équation finale que celle qui nous intéresse, *i.e.* u_C. Ainsi, nous excluons d'abord i_1 :

$$\left\{\begin{array}{c} L\dfrac{\mathrm{d}i_3}{\mathrm{d}t} + R_1(i_3 - C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}) = e(t) \\ u_C + R_2 C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} - R_1(i_3 - C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}) = 0 \end{array}\right. . \tag{11}$$

Pour obtenir une équation dépendant uniquement de u_C, il faut exclure i_3. Nous l'exprimons de la deuxième équation du système pour soumettre dans la première. Nous avons :

$$i_3 = \frac{u_C}{R_1} + (1 + \frac{R_2}{R_1})C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}. \tag{12}$$

Ainsi,

$$(1 + \frac{R_2}{R_1})LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + (\frac{L}{R_1} + R_2 C)\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = e(t). \tag{13}$$

Nous avons obtenu une équation différentielle linéaire non-homogène du deuxième ordre.

2.2 Résolution des équations différentielles linéaires

2.2.1 Rappel sur les équations différentielles

Une équation différentielle est une relation entre une variable, une fonction de cette variable et des dérivées de cette fonctions :

$$F(t, u(t), \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}, ..., \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{n}} u}{\mathrm{d}t^n}))0. \tag{14}$$

On dit qu'une équation différentielle est de l'ordre n si n est l'ordre maximal des dérivées utilisées dans l'équation.

La fonction $u_1(t)$ est une solution de l'équation (14) sur un intervalle $[a, b]$ si elle transforme cette équation en une égalité pour tout $t \subset [a, b]$.

Du fait que la fonction $u(t)$ soit définie par une relation entre ses dérivées, on comprend intuitivement qu'une équation différentielle peut avoir un nombre infini des solutions. On parle alors d'une famille des solutions ; cette famille est généralement décrite par une fonction dépendant, à part de la variable t, des constantes libres :

$$u(t) = y(t, c_1, c_2, ...c_n). \tag{15}$$

L'ensemble de toutes les solutions de l'équation (14) écrit sous forme (15) s'appelle *solution générale* de l'équation différentielle.

Par opposition, une instance de la solution générale obtenue avec des valeurs numériques quelconques des constantes c_i s'appelle *solution particulière.*

Généralement, en pratique on s'intéresse à la solution particulière qui décrit le comportement du système dans un contexte physique donné. Le contexte est défini par l'état du système au moment initial. Mathématiquement l'état initial est donné par le jeu des valeurs de la fonction recherchée et de ses $n-1$ premières dérivées à l'instant $t = t_0$ quelconque, généralement à $t = 0$:

$$u(t_0) = u_0 \quad u'(t_0) = u_1 \quad u''(t_0) = u_3 \quad ... \quad u^{n-1}(t_0) = u_{n-1}. \tag{16}$$

Notez que le nombre de conditions initiales doit nécessairement être égal au nombre des constantes libres dans la solution générale, afin de pouvoir déterminer ces dernières d'une manière unique.

Le problème de la recherche de la solution particulière de (14) satisfaisant les conditions initiales données (16) s'appelle *problème de Cauchy*[2].

En mathématiques on démontre l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy sous les conditions généralement vérifiées dans les problèmes pratiques.

De même que pour les équations algébriques, il n'existe pas de méthode générale pour résoudre analytiquement toute équation différentielle. On sait résoudre les équations de certains types, sous certaines restrictions, par des méthodes *ad hoc.* La théorie des équations différentielles linéaires est particulièrement bien développée, en partie grâce à une élégance du problème prêtant bien à une formalisation, en partie à cause de la place qu'occupent

[2] Augustin Louis Cauchy, illustre mathématicien français

les équations linéaires dans la description des phénomènes naturels et technogènes.

Nous présentons ici un chapitre de la théorie des équations différentielles linéaires particulièrement important pour l'analyse des circuits réactifs.

2.2.2 Équations différentielles linéaires

Une équation différentielle est linéaire si elle résulte des opérations linéaires sur la fonction inconnue $u(t)$ et ses dérivées, *i.e.* d'une addition et d'une multiplication par une constante. Dans ce sens l'équation (13) est linéaire.

Aucune contrainte n'est imposée sur la variable t : elle peut intervenir aussi bien dans les coefficients auprès des dérivées de la fonction que dans le terme libre.

Par exemple, l'équation suivante représente un cas général de l'équation linéaire du premier ordre :

$$f_1(t)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + f_2(t)u = e(t), \tag{17}$$

où $f_1(t)$, $f_2(t)$ et $e(t)$ sont des fonctions connues de t.

Dans la plupart des cas étudiés en théorie des circuits on a l'affaire aux équations à coefficients constants, *i.e.* $f_1(t) = \alpha_1$, $f_2(t) = \alpha_2$.

Pour parler plus facilement des équations linéaires, on introduit un opérateur linéaire $\mathscr{L}$. Il consiste en opérations linéaires sur les dérivées de la fonction à laquelle il est appliqué. Par exemple, un opérateur de deuxième ordre s'écrit comme :

$$\mathscr{L} = \alpha_1 + \alpha_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \alpha_3\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}. \tag{18}$$

Une équation différentielle linéaire s'appelle homogène si tous ses termes sont proportionnelles à la fonction inconnue ou à ses dérivées.

Ainsi, l'équation

$$\mathscr{L}u(t) = 0 \tag{19}$$

est une équation linéaire homogène, alors que l'équation (13) n'est pas homogène, car elle inclut le terme $e(t)$ ne dépendant pas de la fonction recherchée.

Une équation différentielle linéaire s'appelle non-homogène si elle inclut un terme dépendant, en cas général, du temps[3], mais non-dépendant de la fonction recherchée :

[3] ce terme peut être une constante

$$\mathscr{L}u(t) = e(t), \tag{20}$$

où $e(t)$ est une fonction de temps connue. Ainsi, l'équation (13) est une équation linéaire non-homogène.

Le terme dépendant uniquement de t s'appelle *second membre* de l'équation non-homogène.

Les équations linéaires homogènes possèdent une propriété très importante.

> *Si deux fonctions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sont des solutions d'une équation linéaire, leur combinaison linéaire $\beta_1 u_1(t) + \beta_2 u_2(t)$, où β_1 et β_2 sont des constantes, est également une solution de la même équation.*

Cette propriété est facile à démontrer en substituant $\beta_1 u_1(t) + \beta_2 u_2(t)$ dans (19).

Les équations linéaires non-homogènes possèdent la propriété suivante.

> *Soit deux équations linéaires non-homogènes utilisant le même opérateur linéaire $\mathscr{L}$ mais les fonctions seconds membres différents $e_1(t)$ et $e_2(t)$*
>
> $$\mathscr{L}u(t) = e_1(t), \quad \mathscr{L}u(t) = e_2(t) \tag{21}$$
>
> *ont pour solution $u = u_1(t)$ et $u = u_2(t)$.*
> *Alors, la fonction $u = u_1(t) + u_2(t)$ est la solution de l'équation*
>
> $$\mathscr{L}u(t) = e_1(t) + e_2(t). \tag{22}$$

Ce théorème est connu en électronique sous le nom de *principe de superposition* et représente une des propriétés fondamentales des systèmes linéaires. En effet, si l'on considère la fonction $e(t)$ comme une entrée, la fonction inconnue $u(t)$ comme une sortie, l'opérateur L comme la « signature », l'identité du système, la parallèle avec le principe de superposition, que nous avons déjà utilisé, est immédiate.

Ceci permet une interprétation physique d'une équation linéaire : la partie gauche de l'équation $\mathscr{L}u$ décrit la structure intrinsèque du circuit, la partie droite $e(t)$ (le second terme) représente l'excitation appliquée de l'extérieur.

2.2.3 Solution des équations linéaires non-homogènes

Sans démonstration, nous avançons le théorème suivant.

Soit une équation linéaire non-homogène :

$$\mathscr{L}u(t) = e(t). \tag{23}$$

Sa solution générale u_{NH_G} est égale à la somme de u_{H_G}, la solution générale de son équation homogène associée

$$\mathscr{L}u(t) = 0, \tag{24}$$

et de u_{NH_P}, n'importe quelle solution particulière de l'équation non-homogène

$$u_{NH_G} = u_{H_G} + u_{NH_P}. \tag{25}$$

Ce théorème fournit l'algorithme qui permet de trouver la solution générale d'une équation non-homogène donnée, par exemple, de l'équation (13). Connaissant la solution générale et les conditions initiales, on peut résoudre le problème de Cauchy et trouver la solution particulière correspondant aux conditions initiales.

3 Étude d'un circuit réactif du deuxième ordre

Nous proposons maintenant de mettre en application les connaissances sur les équations linéaires et d'étudier un circuit de base, qui est un circuit composé d'une inductance, d'une capacité et d'une résistance (figure 5) .

Voici la formulation du problème.

Soit le circuit présenté figure 5. La source $e(t)$ génère une tension selon la loi suivante :

$$e(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ E_0, & t \geq 0 \end{cases} . \tag{26}$$

Nous souhaitons déterminer l'évolution de toutes les grandeurs du circuit à partir du moment $t = 0$.

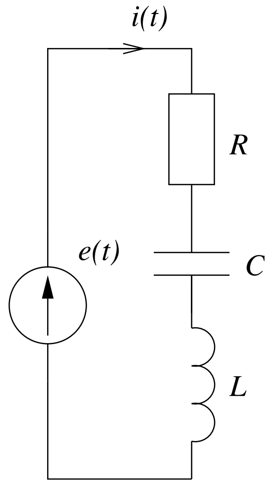

Fig. 5 – Circuit RLC.

3.1 Existence du processus transitoire

Avant de commencer à étudier le processus transitoire, définissons l'état du système avant la commutation et longtemps après la commutation. Notamment, on s'intéresse aux grandeurs définissant l'état énergétique des composants réactifs : u_C et i_L. Dans les deux cas il s'agit d'un circuit de courant continu.

Avant la commutation, toutes les grandeurs sont nulles.

Longtemps après la commutation le courant est nul (car le condensateur est en série avec tous les éléments), toute la tension générée par la source est appliquée au condensateur.

Ainsi, $i_L(t<0) = i_L(t=\infty) = 0$, $u_C(t<0) = 0, u_C(t=\infty) = E_0$. Donc, il y a un changement de l'état énergétique du condensateur – un processus transitoire a lieu.

3.1.1 Équation différentielle du circuit

Pour établir l'équation différentielle du circuit, il suffit d'appliquer la loi des mailles :

$$e = u_R + u_L + u_C. \tag{27}$$

Notez que cette équation décrit le circuit *après* la commutation, donc, la source de tension génère une tension constante, $e(t) = E_0$. Sachant que $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$, $u_C = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C \mathrm{d}t$, nous avons l'équation suivante :

$$e = Ri + L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int i_C \mathrm{d}t. \tag{28}$$

Pour exclure l'intégrale de cette équation, recherchons la fonction $\int i_C \mathrm{d}t$ qui est la charge q du condensateur. Ainsi, en faisant la substitution

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, \tag{29}$$

nous obtenons l'équation suivante :

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = e(t). \tag{30}$$

Pour nous débarrasser de l'intégrale, nous pourrions également dériver les deux parties de l'équation (28), nous obtiendrions une équation pour le courant i. Ce serait une équation homogène, car la dérivée de $e(t)$ est nulle pour $t > 0$. Cependant, nous souhaitons présenter un exemple de résolution d'une équation non-homogène.

Sachant qu'à $t = 0$ le condensateur est déchargé et le courant i du circuit est nul, nous avons les conditions initiales suivantes :

$$q(0) = 0, \quad q'(0) = 0. \tag{31}$$

Il faut donc résoudre le problème de Cauchy pour l'équation (30) avec les conditions initiales (31).

3.2 Solution générale de l'équation homogène

Tout d'abord, trouvons la solution générale de l'équation homogène associée à l'équation (30) :

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = 0. \tag{32}$$

Cherchons la solution de cette équation sous la forme

$$u = Ae^{\lambda t}, \tag{33}$$

où A et λ sont des constantes.

En substituant (33) dans (32) nous avons :

$$L\lambda^2 A e^{\lambda t} + R\lambda A e^{\lambda t} + \frac{1}{C} A e^{\lambda t} = 0. \tag{34}$$

En divisant (34) par (33) nous obtenons une équation algébrique :

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0. \tag{35}$$

Cette équation s'appelle « équation caractéristique »pour l'équation différentielle linéaire homogène et aussi pour le circuit décrit par cette équation.

Ainsi, la fonction (33) est effectivement une solution de l'équation (32), si λ est une racine de l'équation (35). Notez que ceci est vrai quelle que soit la valeur de A, ainsi A sera une constante libre de la solution générale.

L'équation (35) est une équation quadratique ; la nature de ses racines dépend de son déterminant $\mathscr{D}$:

$$\mathscr{D} = R^2 - 4\frac{L}{C}. \tag{36}$$

Trois cas sont possibles : $\mathscr{D} > 0$, $\mathscr{D} = 0$ et $\mathscr{D} < 0$. Nous étudions le premier et le troisième cas, car la situation où $\mathscr{D} = 0$ est relativement rare en pratique.

3.2.1 $\mathscr{D} < 0$

Nous commençons par ce cas de figure à cause de son importance pratique et aussi de sa complexité.

Dans ce cas, l'équation caractéristique (35) a deux racines conjuguées complexes, *i.e.* $\lambda_1 = \lambda_2^*$:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \tag{37}$$

Posons

$$\gamma = -\frac{R}{2L}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \tag{38}$$

Ainsi, la solution générale de l'équation (32) est donnée par :

$$u_{H_G} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = e^{\gamma t}(A_1 e^{j\omega_0 t} + A_2 e^{-j\omega_0 t}). \tag{39}$$

Cette fonction est complexe dans le cas général. Or, nous recherchons la loi d'évolution d'une tension qui est forcement réelle. Ainsi, nous exigeons que la solution de l'équation (30) soit réelle.

Au vu de la fonction u_{GH}, cela est possible uniquement si les constantes A_1 et A_2 sont des nombres complexes conjugués :

$$A_1 = A_2^*. \tag{40}$$

Exprimons A_1 et A_2 dans les coordonnées polaires . Soit

$$A_1 = \frac{A_0}{2} e^{j\varphi_0}, \quad A_2 = \frac{A_0}{2} e^{-j\varphi_0}, \tag{41}$$

où A_0 et ϕ_0 sont des constantes réelles. Nous avons introduit un facteur 2 pour des raisons pratiques (qui seront évidentes des développements ultérieurs) ; ce facteur n'altère aucunement la démonstration car, de toute façon, les constantes A_1 et A_2 sont introduites comme arbitraires.

Ainsi, la fonction (39) devient :

$$u_{H_G} = \frac{A_0}{2} e^{\gamma t}(e^{j\varphi_0 t} e^{j\omega_0 t} + e^{-j\varphi_0 t} e^{-j\omega_0 t}) = \frac{A_0}{2} e^{\gamma t}(e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)}), \tag{42}$$

ce qui équivaut à :

$$u_{H_G} = A_0 e^{\gamma t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{43}$$

Ainsi, la solution générale de l'équation homogène est une fonction sinusoïdale dont l'amplitude diminue selon la loi exponentielle (elle diminue car $\gamma < 0$).

3.3 $\mathscr{D} > 0$

Dans ce cas les racines de l'équation (35) sont réelles et négatives :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R}{2L} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \tag{44}$$

Ainsi, la solution générale de l'équation homogène s'écrit sous la forme :

$$u_{H_G} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{45}$$

A_1 et A_2 sont des constantes réelles.

À la différence du cas précédent, cette solution n'a pas un caractère oscillatoire.

On remarque que la nature de la solution est déterminée par la valeur de la résistance R, car elle définit un des termes du déterminant et donc son signe. Physiquement, on peut donner l'interprétation suivante : la résistance est responsable pour la dissipation de l'énergie électrique du circuit. Or, un régime oscillatoire n'est rien d'autre qu'un échange *non-dissipatif* de l'énergie entre le condensateur et l'inductance. Ainsi, à chaque cycle des oscillation, la résistance dissipe une partie de l'énergie électrique totale, ce qui fait que l'amplitude des oscillations diminue et tend vers zéro. Mais si la résistance est trop grande, les pertes associées à cet échange sont tellement importantes que toute l'énergie est dissipée au début du premier cycle, ce qui rend une oscillation impossible.

Une autre interprétation peut être proposée.

Lorsque $\mathscr{D} < 0$, l'expression pour ω_0 (38) donne la pulsation, donc la fréquence des oscillations libres. Ainsi, lorsque $\mathscr{D} = 0$, cette fréquence tend vers zéro, donc la période tend vers l'infini – la solution perd son caractère oscillatoire.

3.3.1 Solution particulière de l'équation non-homogène

Pour écrire la solution générale de l'équation (30) d'après la formule (25), il nous manque une solution particulière de l'équation (30). Notez, il s'agit de trouver *une solution particulière quelconque* : pour cela il suffit de « deviner »une solution qui satisferait cette équation.

Pour cela laissons-nous guider par le sens physique. Reconsidérons l'équation (30) et la forme générale de sa solution (25). Nous savons que la solution générale de l'équation homogène tend vers zéro, car elle dépend des fonctions exponentielles avec exposants négatifs. Ainsi, longtemps après la commutation ($t \to \infty$), la solution de l'équation (30) devient :

$$u(t)|_{t\to\infty} = u_{NH_P}, \tag{46}$$

i.e. la composante u_{H_G} s'éteigne, et la solution devient égale à la solution particulière de l'équation non-homogène que nous devons trouver.

Or nous savons que longtemps après la commutation le circuit retrouve son régime établi, dans notre cas, c'est le régime de courant continu. Ainsi, *la fonction décrivant le régime établi du circuit est une solution*[4] *particulière de l'équation non-homogène.* Ainsi nous pouvons supposer que la solution particulière qui nous intéresse est une fonction constante, égale à la charge sur le condensateur longtemps après la commutation. Vérifions le. Soit

$$q_{NH_P}(t) = Q_0, \tag{47}$$

Q_0 est une constante quelconque dont la valeur nous devons trouver.

Nous substituons cette fonction dans l'équation non-homogène (30). Nous avons :

$$\frac{1}{C}Q_0 = e(t) = E_0. \tag{48}$$

Donc,

$$Q_0 = E_0C, \tag{49}$$

ce qui correspond parfaitement à la charge du condensateur en régime établi après la commutation.

Ainsi, la solution générale de l'équation (30) s'écrit comme :

$$q(t) = \begin{cases} A_0e^{\gamma t}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + E_0C, & \dfrac{R}{2L} < \dfrac{1}{LC} \\ A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t} + E_0C, & \dfrac{R}{2L} > \dfrac{1}{LC} \end{cases}, \tag{50}$$

où A_1, A_2, A_0 et φ_0 sont des constantes libres, dont les valeurs peuvent être précisées à partir des conditions initiales.

3.4 Problème ce Cauchy : établissement de la solution particulière adaptée au contexte

Les conditions initiales pour l'équation (30) sont données par (31). Ainsi, pour définir les valeurs des constantes libres, nous n'avons qu'à substituer (50) dans (31).

[4] Nous disons *une* solution car, évidemment, l'équation (30) a un nombre infini des solutions particulières, dont n'importe laquelle nous conviendrait. Tout simplement, la considération du régime établi est une méthode directe, donnant une solution particulière de forme simple.

Par exemple si $\frac{R}{2L} < \frac{1}{LC}$, la solution générale s'écrit comme :

$$q(t) = A_0 e^{\gamma t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + E_0 C. \tag{51}$$

Sa dérivée est donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = A_0 e^{\gamma t} (\gamma \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)) \tag{52}$$

Ainsi,

$$\left.\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = A_0 (\gamma \cos(\varphi_0) - \omega_0 \sin(\varphi_0)) \tag{53}$$

En résolvant le système

$$\left\{ \begin{array}{c} A_0 \cos\varphi_0 + E_0 C = 0 \\ A_0(\gamma \cos(\varphi_0) - \omega_0 \sin(\varphi_0)) = 0 \end{array} \right. \tag{54}$$

nous avons :

$$A_0 = -\frac{E_0}{\cos(\varphi_0)} \tag{55}$$

$$\varphi_0 = artg(-\frac{\gamma}{\omega_0}) \tag{56}$$

3.5 Application numérique

Soit $L = 1H, C = 1F, R = 0.1\Omega$. Dans cette configuration, le déterminant est négatif, la réponse du circuit est oscillatoire. La figure 6 présente les graphiques de la tension sur le condensateur (et donc sa charge) et du courant dans l'inductance.

Nous voyons que la tension sur le condensateur est continue au moment de la commutation. De plus, la courbe correspondante est lisse ($i.e.$ dérivable) à $t = 0$ et la dérivée est nulle, comme cela a été exigé par (16).

Pour pouvoir se rendre compte de l'influence de la valeur de la résistance sur le processus transitoire, à la figure 7 nous donnons les mêmes graphiques pour $R = 0.5\Omega$.

On voit que les oscillations avec $R = 0.5\Omega$ s'éteignent beaucoup plus vite qu'avec $R = 0.1\Omega$.

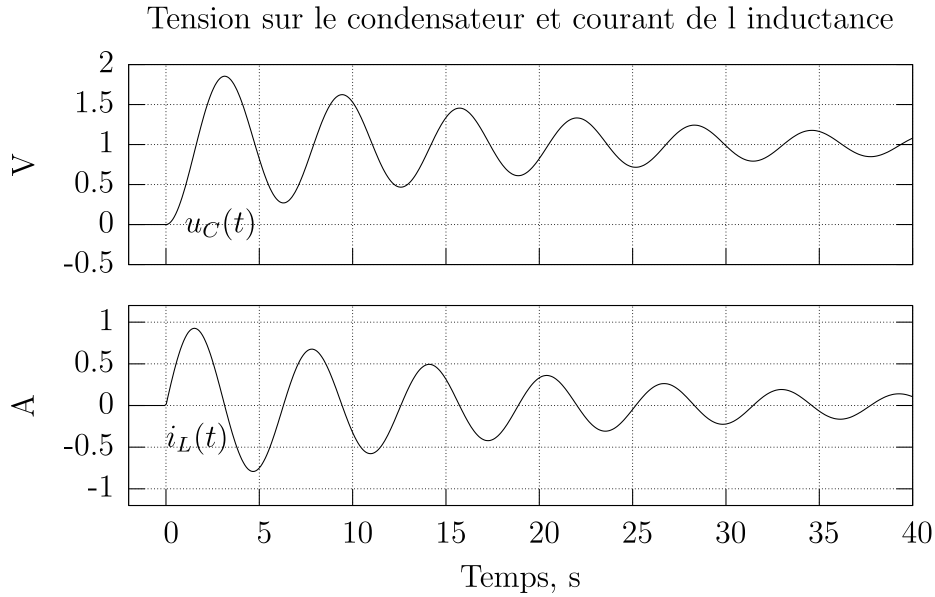

FIG. 6 – Processus transitoire : un réponse oscillatoire. La courbe est obtenue pour les éléments avec les valeurs $L = 1H$, $C = 1F$, $R = 0.1\Omega$.

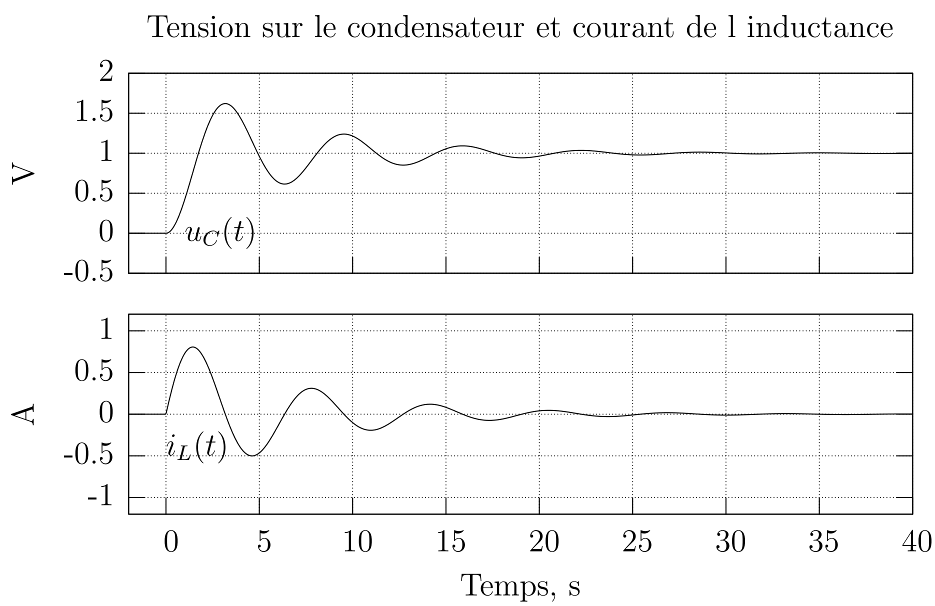

FIG. 7 – Processus transitoire : un réponse oscillatoire. La courbe est obtenue pour les éléments avec les valeurs $L = 1H$, $C = 1F$, $R = 0.5\Omega$.

Pour conclure, nous étudions le cas où le déterminant est positif, avec $R = 3.3\Omega$. Dans ce cas la solution générale est donnée par :

$$q(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + E_0 C. \tag{57}$$

Sa dérivée vaut :

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{58}$$

Ainsi,(31) sachant (16), nous avons pour les constantes libres :

$$A_1 = E_0 C \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad A_1 = E_0 C \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \tag{59}$$

La figure 8 donne les graphiques correspondant à ce cas.

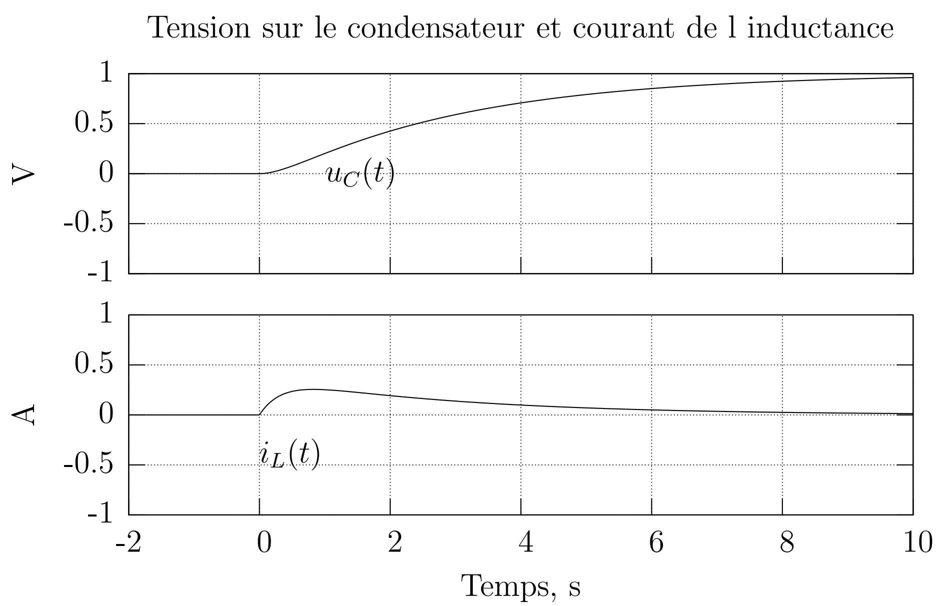

FIG. 8 – Processus transitoire : une réponse exponentielle. La courbe est obtenue pour les éléments avec les valeurs $L = 1H$, $C = 1F$, $R = 3.3\Omega$.

3.6 Conclusions : interprétation physique

Nous sommes maintenant en mesure de faire quelques généralisations quant à la physique des processus transitoires. Les termes exponentiels issus de la solution générale de l'équation (30) correspondent à la phase de transition entre deux états énergétiques des éléments réactifs du circuit. Cette composante de la solution, appelée *transitoire* ou *libre*, s'éteint dans le temps. Il est très important de noter que le *caractère* de cette composante (*i.e.* la fonction, la constante de temps, la fréquence...) ne dépend pas du tout de la loi d'évolution des grandeurs générées par les sources indépendantes, mais uniquement de la topologie du circuit et des valeurs de ses éléments.

La composante transitoire est superposée sur la composante établie, *i.e.* sur celle qui correspond à une solution particulière de l'équation non-homogène. La composante établie représente l'état énergétique final du circuit – un état différent de celui d'avant la commutation. L'adjonction de la composante transitoire permet donc aux grandeurs associées aux énergies des éléments réactifs de suivre une évolution continue d'un état à l'autre.

Cependant, tandis que la nature du processus transitoire ne dépend pas des tensions et des courant imposés au circuit, les amplitudes des composantes transitoires le sont (les constantes libres A_1 et A_2). Dans les processus réels ces constantes prennent les valeurs telles qu'*au moment de commutation* ($t = 0+$) *les grandeurs associées aux énergies des éléments réactifs gardent leurs valeurs de l'instant d'avant* ($t = 0-$)*.* Les valeurs de ces constantes dépendent donc de la valeur de la composante établie au moment de commutation ($t = 0+$)(car cette composante est présente dès le moment de commutation).

> *Ainsi, pour la définition des constantes libres de la composante transitoire, seule compte la valeur de la composante établie au moment de commutation.*

Nous aurons l'occasion de confirmer ces thèses dans le cours suivant, où nous étudierons les régimes établis observés avec les sources de tension et de courant sinusoïdales.