Cours 6. Régime harmonique des circuits réactifs

Par Dimitri GALAYKO
Unité d'enseignement Élec-info
pour master ACSI à l'UPMC

Octobre-décembre 2005

Dans ce cours nous poursuivons l'étude des circuits réactifs. Nous allons nous intéresser particulièrement au régime établi des circuits soumis à des excitations sinusoïdales.

1 Régime établi des circuits avec des sources sinusoïdales

1.1 Rappel sur les sources sinusoïdales

Une source de tension ou de courant sinusoïdale génère une tension ou un courant qui obéit à une loi sinusoïdale. Par exemple, pour une source de tension nous avons :

$$e(t) = E_O \cos(\omega t + \varphi_0), \tag{1}$$

où E_0 est l'amplitude de la sinusoïde, l'argument du cosinus est la phase (qui croît linéairement avec le temps), ω est la fréquence angulaire de la sinusoïde mesurée en rad/s, autrement appelé « pulsation »ou souvent fréquence[1], φ_0 est la valeur de la phase à $t = 0$ appelé « phase initiale ».

Le signal obéissant à la loi (1) s'appelle signal harmonique, et le régime qui s'établit dans un circuit excité par de tels signaux s'appelle régime harmonique.

[1] ce qui n'est pas rigoureusement correct car la fréquence f est un paramètre inverse à la période du signal mesuré en $1/s = Hz$ et effectivement, proportionnel, donc assimilable, à la pulsation $\omega = 2\pi f$

Nous appelons la fonction (1) « fonction sinusoïdale », car le sinus est la même fonction que le cosinus, avec la phase initiale différente de $\pi/2$, *i.e.* avec un décalage temporel de $\pi/(2\omega)$. Pour des raisons de commodité nous préférons utiliser les cosinus pour décrire les grandeurs générées par les sources sinusoïdales.

1.2 Solution particulière de l'équation linéaire non-homogène

Nous présentons la méthode d'analyse du régime harmonique établi sur l'exemple du circuit RLC dont le régime transitoire a été étudié dans le cours précédent.

Soit un circuit RLC série attaqué par une source de tension sinusoïdale (figure 1).

$$e(t) = E_O \cos(\omega t + \varphi_0), \tag{2}$$

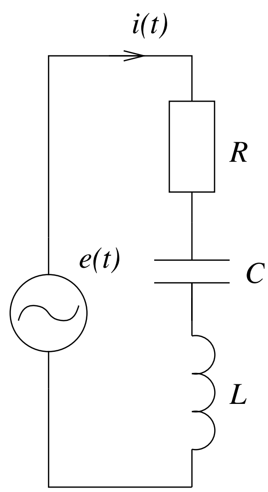

FIG. 1 – Circuit RLC avec une source de tension sinusoïdale.

On peut supposer que toutes les grandeurs de ce circuit évoluent selon des lois sinusoïdales. Ceci est vrai dans la mesure où la tension d'entrée est liée à toutes les grandeurs par des relations différentielles linéaires, et que la dérivée et l'intégrale d'une fonction sinusoïdale est également une fonction sinusoïdale (avec une amplitude et une phase initiale différentes). Ainsi le problème de la recherche du régime harmonique se réduit à la recherche des valeurs des amplitudes et des phases initiales des grandeurs du circuit.

Recherchons la loi d'évolution du courant $i(t)$ dans la source commun pour tous les éléments du circuit.

Rappelons l'équation différentielle décrivant la loi d'évolution du courant $i(t)$:

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t = E_0\cos(\omega t). \tag{3}$$

Nous avons gardé l'intégrale afin d'avoir une équation pour le courant (et non pas pour la charge comme dans le cours précédent). La méthode que nous allons présenter résout également les équations contenant des intégrales des fonctions recherchées.

Comme nous avons dit plus haut, on suppose que le courant $i(t)$ évolue selon une loi sinusoïdale. Recherchons la solution particulière de l'équation (3) sous la forme :

$$i(t) = I_0\cos(\omega t + \varphi_{I0}), \tag{4}$$

où I_0 et φ_{I0} sont les paramètres que l'on peut trouver en substituant cette fonction dans l'équation (3).

Cependant, nous proposons d'étudier une méthode bien plus pratique allant bien au-delà d'une simple résolution des équations différentielles.

1.3 Amplitudes complexes

Nous proposons d'étudier un circuit identique à celui de la figure 1, à part que la source $e(t)$ génère un sinus au lieu d'un cosinus :

$$e_1(t) = E_O\sin(\omega t + \varphi_0). \tag{5}$$

L'équation différentielle décrivant ce nouveau circuit s'écrit comme :

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t = E_0\sin(\omega t). \tag{6}$$

Il est évident que l'équation (6) est la même que (3), avec l'axe de temps décalé vers la droite de $\pi/(2\omega)$ secondes. Par conséquent, ces équations acceptent pour solution les mêmes fonctions décalées de cet intervalle. Ainsi, si (4) est la solution de l'équation (3), l'équation (6) accepte pour solution la fonction :

$$i_1(t) = I_0\sin(\omega t + \varphi_{0i} - \frac{\pi}{2}) = I_0\sin(\omega t + \varphi_{0i}), \tag{7}$$

Par conséquent, la fonction $i_1(t)$ transforme l'équation (6) en égalité :

$$L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + Ri_1 + \frac{1}{C}\int i_1\mathrm{d}t = E_0\sin(\omega t). \tag{8}$$

Multiplions les deux cotés de cette équation par une unité complexe j :

$$L\frac{\mathrm{d}ji_1}{\mathrm{d}t} + Rji_1 + \frac{1}{C}\int ji_1\mathrm{d}t = jE_0\sin(\omega t). \tag{9}$$

Il est évident que cette nouvelle équation accepte pour solution $ji_1(t)$.

Aditionnons les équations (3) et (9). Nous obtenons :

$$L\frac{\mathrm{d}(i + ji_1)}{\mathrm{d}t} + R(i + ji_1) + \frac{1}{C}\int (i + ji_1)\mathrm{d}t = E_0\cos(\omega t) + jE_0\sin(\omega t). \tag{10}$$

Par la suite nous désignons une grandeur complexe par un point au-dessus du symbole. Ainsi, cette nouvelle équation avec un second terme complexe

$$\dot{e}(t) = E_0\cos(\omega t) + jE_0\sin(\omega t) \tag{11}$$

a pour solution

$$\dot{i}(t) = i(t) + ji_1(t), \tag{12}$$

où $i(t)$ et $i_1(t)$ sont des fonctions réelles.

Ainsi, la solution de l'équation du système original (3) est égale à la partie réelle de la solution de l'équation (10), et si l'on connaît la deuxième, on peut facilement en déduire la première. Remarquons que $\cos a + j\sin a = e^{ja}$, et réécrivons l'équation (10) :

$$L\frac{\mathrm{d}\dot{i}}{\mathrm{d}t} + R\dot{i} + \frac{1}{C}\int \dot{i}\mathrm{d}t = \dot{E}e^{j\omega t}, \tag{13}$$

où $\dot{E} = E_0$.

Détaillons la fonction complexe $\dot{i}(t)$ et transformons la en forme exponentielle :

$$\begin{aligned}\dot{i} = i + ji_1 = I_0\cos(\omega t + \varphi_{0i}) + jI_0\sin(\omega t + \varphi_{0i}) = \\ = I_0e^{j(\omega t+\varphi_{0i})} = I_0e^{j\varphi_{0i}}e^{j\omega t} = \dot{I}e^{j\omega t},\end{aligned} \tag{14}$$

où

$$\dot{I} = I_0 e^{j\varphi_{0i}}. \tag{15}$$

La démonstration ci-dessus a été donnée pour le courant i du circuit. Or, puisque toutes les grandeurs du circuit sont définies par des équations différentielles linéaires du même type que (3), tous les courants et les tensions du circuit peuvent être représentés par les fonctions de type

$$\dot{f}(t) = \dot{A} e^{j\omega t}. \tag{16}$$

Du point de vue géométrique, cette fonction définit un vecteur en rotation, dont l'origine est fixe et le point terminal se trouve en mouvement circulaire uniforme, avec une vitesse angulaire ω.

Le facteur $e^{j\omega}$ définit la rotation uniforme d'un vecteur unité, avec une vitesse angulaire ω.

Le sens géométrique du facteur constant complexe $\dot{A}$ est évident s'il est représenté en forme exponentielle :

$$\dot{A} = A_0 e^{j\varphi}, \tag{17}$$

où

$$A_0 = |\dot{A}|, \quad \varphi = arg(\dot{A}). \tag{18}$$

Ainsi, la fonction $\dot{f}$ s'écrit comme :

$$\dot{f}(t) = A_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \tag{19}$$

Le module de la constante $\dot{A}$ définit la longueur du vecteur, son argument représente l'angle du vecteur à l'instant initial $t = 0$. Le facteur $\dot{A}$ s'appelle « amplitude complexe »de la sinusoïde complexe $\dot{f}(t)$. La fonction décrivant la loi d'évolution réelle de la grandeur du circuit correspondante est égale à la partie réelle de la fonction $\dot{f}(t)$:

$$f(t) = \mathrm{Re}\dot{f}(t). \tag{20}$$

Pour trouver l'amplitude complexe correspondant à une fonction sinusoïdale $f(t)$ exprimée via un cosinus

$$f(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0), A_0 \geq 0, \tag{21}$$

il suffit de substituer A_0 et φ_0 dans (17). Notez que A_0 représente l'amplitude de la sinusoïde, et donc, est positive par définition. La phase initiale φ_0 est la phase initiale d'un cosinus. Ainsi, pour trouver ces deux paramètres pour une fonction sinusoïdale exprimée différement, par exemple, avec un facteur négatif ou/et par un sinus, il faut d'abord la ramener vers l'aspect (21) en utilisant les formules trigonométriques usuelles. Des exemples seront montrés plus tards.

> *Ainsi, toutes les grandeurs du circuit sont représentées par des vecteurs en rotation uniforme, avec la vitesse angulaire égale à la pulsation des sources sinusoïdales. Les projections des vecteurs sur l'axe Ox donnent les fonctions d'évolution des tensions et des courants réels que l'on recherche. La longueur et l'angle initial des vecteurs définissent l'amplitude et la phase initiale des tensions et des courants correspondants. Ces deux paramètres sont définis par les amplitudes complexes des fonctions décrivant les vecteurs.*

1.4 Méthode des amplitudes complexes

Dans la démonstration qui va suivre nous allons montrer comment l'utilisation des sinusoïdes complexes permet de replacer les équations différentielles par des équations algébriques, de sorte que la composante établie de l'équation (3) puisse être trouvée très facilement.

Recherchons la composante établie du courant complexe $\dot{i}(t)$ sous la forme :

$$\dot{i}(t) = \dot{I}e^{j\omega t}, \tag{22}$$

où $\dot{I}$ est l'amplitude complexe du courant $\dot{i}(t)$ que l'on doit déterminer.

En substituant i par (22) dans (13) et en divisant les deux parties de l'équation obtenue par $e^{j\omega t}$ nous avons :

$$j\omega L\dot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = E_0. \tag{23}$$

Nous avons omis la constante d'intégration, car en régime harmonique toutes les tensions et les courants sont de pures fonctions sinusoïdales[2].

[2] Ceci peut être démontré par l'absurde. Supposons que $\int \dot{i}(t)dt = \frac{1}{j\omega}\dot{I}e^{j\omega t} + C$, où C est une constante non-nulle. On soumet (22) dans (13) et, en mettant en facteur $e^{j\omega t}$, on constate que (13) se transforme en $\dot{\psi}e^{j\omega t} + C = 0$, où $\dot{\psi}$ est une constante complexe que l'on ne souhaite pas détailler. Or cette relation est une égalité *pour tout t* uniquement si $\omega = 0$, $\dot{\psi} = -C$. Or la première condition est en contradiction avec la nature de la solution particulière $\dot{i}(t)$ que l'on recherche.

Ainsi, nous obtenons une équation algébrique linéaire qui relie les amplitudes complexes de la source d'entrée et de la grandeur recherchée. C'est en effet très logique, car le facteur de rotation $e^{j\omega t}$ est le même pour toutes les grandeurs – connues et inconnues – du circuit. Ce facteur est connu de par le sens physique, et il est inutile d'établir et de résoudre une équation différentielle pour le déterminer.

De (23) on trouve directement $\dot{I}$:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{j\omega L + R + \dfrac{1}{j\omega C}} \tag{24}$$

Connaissant $\dot{I}$ il est facile de déterminer l'amplitude I_0 et la phase initiale φ_{0i} du courant i de l'équation (3). Pour cela il suffit de représenter le nombre complexe $\dot{I}$ en coordonnées polaires :

$$\dot{I} = I_0 e^{j\varphi_{0i}}, \tag{25}$$

où

$$I_0 = |\dot{I}|, \quad \varphi_{0i} = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\dot{I}}{\mathrm{Re}\dot{I}}\right). \tag{26}$$

2 Impédances

Considérons le schéma de la figure 2, où un dipôle RLC série est raccordé à une source de tension complexe $\dot{e}(t)$, *i.e.* la tension complexe $\dot{u}$ aux bornes du dipôle est égale à la tension générée par cette source. D'après nos résultats, l'amplitude complexe du courant du circuit est proportionnelle à l'amplitude complexe de la tension de la source. C'est un équivalent de la loi d'Ohm pour les amplitudes complexes des courants et des tensions. Le coefficient de proportionnalité entre $\dot{I}$ et $\dot{U}$ s'appelle « impédance »et est désignée par la lettre Z :

$$\dot{U} = Z\dot{I}. \tag{27}$$

Le sens physique de l'impédance d'un dipôle peut être évident si l'on présente les grandeurs complexes de l'équation (27) sous la forme exponentielle :

$$U_0 e^{j\varphi_U} = |Z| e^{j \arg Z} I_0 e^{j\varphi_I} = |Z| I_0 e^{j(\varphi_I + \arg Z)}. \tag{28}$$

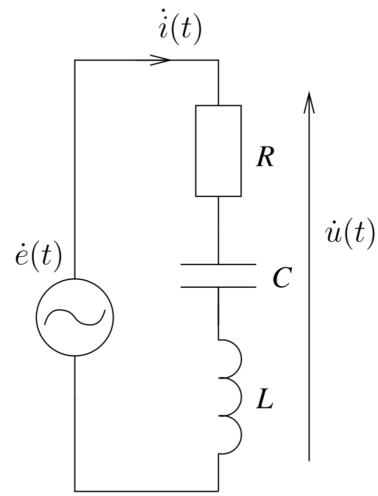

Fig. 2 – Circuit RLC avec une source de tension sinusoïdale complexe.

Ainsi, le module de l'impédance donne le rapport entre les amplitudes de la tension et du courant associés au dipôle, l'argument donne la différence entre la phase initiale de la tension et celle du courant, *i.e.* le *retard* de phase du courant par rapport à celle de la tension.

D'après (24), l'impédance d'un circuit RLC série vaut :

$$Z = j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}. \tag{29}$$

Intuitivement on comprend que chaque terme représente l'impédance d'un des composants, et que de même que pour les résistances, les impédances des éléments connectés en série s'ajoutent. Dans les trois sous-paragraphes suivants nous allons définir d'une manière rigoureuse l'impédance de chacun des éléments R, C et L.

Pour le faire, nous suivrons le schéma suivant : nous écrivons la relation entre la tension et le courant pour l'élément, nous y soumettons une tension sinusoïdale, nous recherchons l'expression de la forme d'onde (sinusoïdale) du courant. Nous déterminons, pour la tension de la source et pour le courant calculé, les amplitudes complexes correspondantes. L'impédance de l'élément est calculée comme le rapport entre les deux.

Soit dans les trois cas une tension sinusoïdale est appliquée à l'élément :

$$u = E_0 cos(\omega t), \tag{30}$$

donc, l'amplitude complexe correspondante est donnée par :

$$\dot{U} = E_0 e^{j0}. \tag{31}$$

Rappelons, que le module de l'amplitude complexe est égale à l'amplitude de la fonction sinusoïdale correspondante (qui est positive *par définition*), l'argument de l'amplitude complexe est égale à la phase intiale si la fonction est *exprimée par un cosinus* :

$$f(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad A_0 \geq 0. \tag{32}$$

2.1 Impédance d'un résistor

Écrivons la relation entre le courant et la tension dans une résistance.

$$i = \frac{u}{R}. \tag{33}$$

Le courant dans la résistance s'exprime comme :

$$\dot{i} = \frac{E_0}{R} \cos(\omega t). \tag{34}$$

Ainsi, l'amplitude complexe du courant est donnée par

$$\dot{I} = \frac{E_0}{R} e^{j0} = \frac{E_0}{R}. \tag{35}$$

Donc, l'impédance de la résistance vaut :

$$Z_R = \frac{E_0}{R}. \tag{36}$$

Ainsi, *l'impédance d'un résistor est réelle et égale à sa résistance.* Résumons les expressions du courant et de la tension réels associées à une résistance :

$$\begin{aligned} u &= E_0 \cos \omega t, \\ i &= \frac{E_0}{R} \cos \omega t. \end{aligned} \tag{37}$$

Donc, puisque l'impédance d'un résistor est réelle, il n'y a pas de déphasage entre le courant et la tension.

2.2 Impédance de condensateur

Écrivons la relation entre le courant et le tension pour un condensateur.

$$i = C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}. \tag{38}$$

Sachant (30), nous avons pour le courant :

$$i(t) = -E_0 C\omega \sin(\omega t). \tag{39}$$

Pour connaître l'amplitude complexe correspondante, il faut exprimer le courant sous la forme donnée par (32). On le fait facilement sachant que $-\sin\alpha = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$:

$$i(t) = E_0 C\omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}). \tag{40}$$

Ainsi, l'amplitude complexe du courant du condensateur est donnée par :

$$\dot{I} = E_0 C\omega e^{j\frac{\pi}{2}} = E_0 C\omega(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}) = E_0 j\omega C. \tag{41}$$

L'impédance d'un condensateur est donnée par :

$$Z_C = \frac{\dot{E}}{\dot{I}_C} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \tag{42}$$

La phase de l'impédance d'un condensateur est négative, car le courant dans un condensateur *avance* la tension du condensateur de $\frac{\pi}{2}$ (cela est également montré par l'expression du courant réel (40)). La figure 3 présente les formes d'onde de la tension et du courant d'un condensateur en régime harmonique.

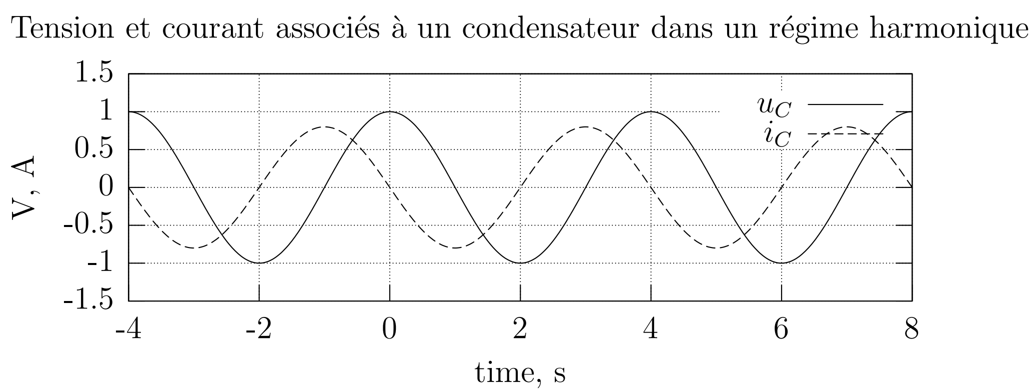

FIG. 3 – Graphiques de la tension et du courant d'un condensateur en régime harmonique. $C = 0.51F$, $E_0 = 1V$, $\omega = 1.57 rad/s$

À la différence de l'impédance d'une résistance, l'impédance d'un condensateur est complexe et inversement proportionnelle à la fréquence. Ainsi, un condensateur présente une impédance très faible en hautes fréquences (nulle à fréquence infinie), et une impédance très élevée à basses fréquences (infinie à fréquence nulle[3]).

2.3 Impédance d'une inductance

On procède de la même façon qu'avec le condensateur.

La relation entre le courant et le tension d'une inductance est la suivante :

$$i_L = \frac{1}{L}\int u\mathrm{d}t. \tag{43}$$

Sachant (30), nous avons pour le courant :

$$i_L(t) = \frac{E_0}{\omega L}\sin(\omega t). \tag{44}$$

Nous considérons que la constante d'intégration est nulle (*cf.* la note 2 à la page 6).

Pour connaître l'amplitude complexe correspondante, il faut exprimer le courant sous la forme donnée par (32). On le fait sachant que $\sin\alpha = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$:

$$i_L(t) = \frac{E_0}{\omega L}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}). \tag{45}$$

Ainsi, l'amplitude complexe du courant d'une inductance est donnée par :

$$\dot{I}_L = \frac{E_0}{\omega L}e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{E_0}{\omega L}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + j\sin(-\frac{\pi}{2})) = -\frac{E_0 j}{\omega L}. \tag{46}$$

L'impédance d'une inductance est donnée par :

$$Z_L = \frac{\dot{E}}{\dot{I}_L} = -\frac{\omega L}{j} = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}}. \tag{47}$$

La phase de l'impédance d'une inductance est positive, car la phase du courant dans une inductance affiche un *retard* $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la phase de sa tension (cela est également montré par l'expression du courant réel (45)). La figure 4 présente les formes d'onde de la tension et du courant d'une inductance en régime harmonique.

[3]nous le savions : un condensateur présente un circuit ouvert pour les courants et les tensions continus, *i.e.* ayant une fréquence nulle

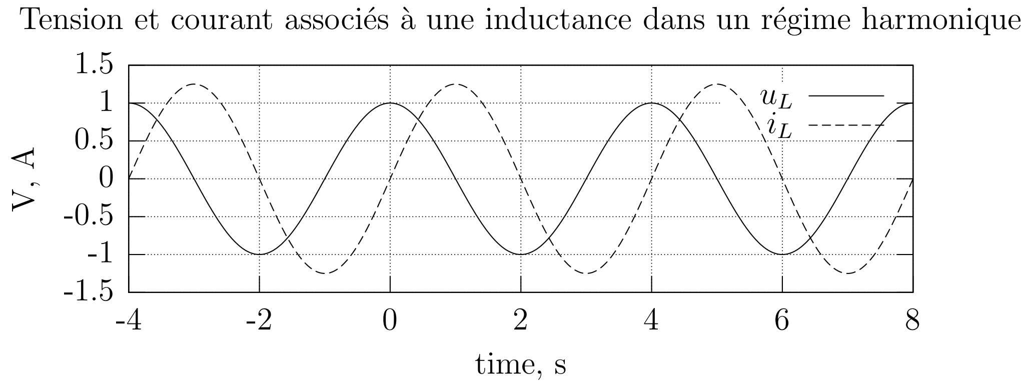

FIG. 4 – Graphiques de la tension et du courant d'une inductance en régime harmonique. $L = 0.51H$, $E_0 = 1V$, $\omega = 1.57rad/s$

Notez que l'impédance d'une inductance est proportionnelle à la fréquence. Elle est nulle à fréquence nulle[4] et infinie à fréquence infinie.

3 Étude d'un circuit RLC série

3.1 Résonance

Revenons au circuit RLC série de la figure 1, notamment, à l'expression de l'amplitude complexe $\dot{I}$ du courant $i(t)$ donnée par (24). L'amplitude et la phase initiale du courant dépendent de la fréquence. Intéressons nous à l'amplitude du courant dans le circuit, sachant qu'elle est égale au module de l'amplitude complexe :

$$I_0(\omega) = |\dot{I}| = \frac{E_0}{|R + j(\omega L - \dfrac{1}{\omega C})|} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})^2}}. \tag{48}$$

Cette fonction est nulle à $\omega = \infty$ et $\omega = 0$, par conséquent elle doit posséder un maximum à une fréquence finie. Le numérateur est constante, le dénominateur est une somme de deux termes non-négatifs dont un constant ; par conséquent c'est quand $\omega L - \dfrac{1}{\omega C}$ est nul ou minimale que $I_0(\omega)$ est maximal.

[4]on sait qu'une inductance est un court-circuit en régime de courant continu

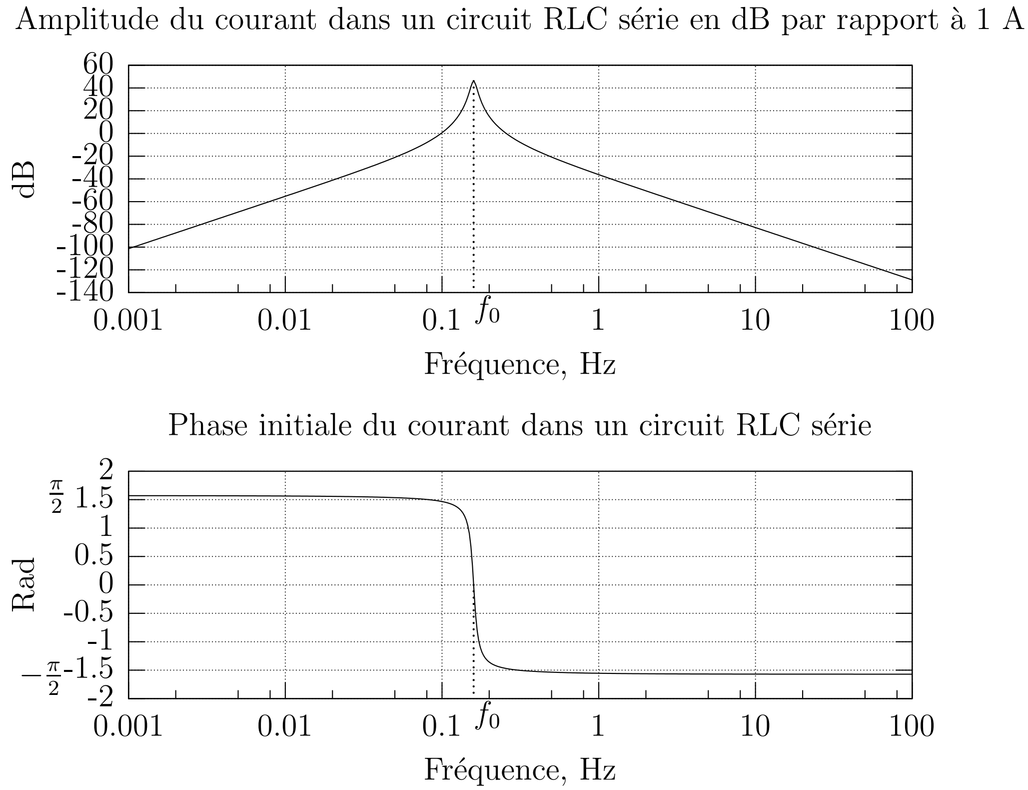

FIG. 5 – Graphique de l'amplitude et de la phase du courant dans un circuit RLC série en fonction de la fréquence ($L = 1H$, $C = 1F$, $R = 0.1 Ohms$, $E_0 = 1V$).

Il se trouve que

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \tag{49}$$

lorsque

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{50}$$

La figure 5 présente le graphique du module et de la phase du courant i en fonction de la fréquence f (rappelons que $\omega = 2\pi f$).

Nous avons présenté l'axe des fréquences en échelle logarithmique et la valeur du courant en décibels *par rapport à la valeur de 1 A*[5] , car dans ce

[5]Rappelons, que l'on utilise les décibels pour représenter un *rapport* entre deux gran-

cas on se rend mieux compte du comportement en fréquences éloignées de la fréquence du maximum.

Étudions le circuit à cette fréquence. Tout d'abord, notons qu'à cette fréquence les impédances du condensateur et de l'inductance ont les modules égaux et les arguments opposés, ce qui fait que les termes correspondants s'annulent dans l'expression (48) :

$$Z_L\Big|_{\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}} = -Z_C\Big|_{\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}} = j\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{51}$$

L'impédance totale du circuit est, par conséquent, purement résistive :

$$Z_{RLC} = R \tag{52}$$

et l'amplitude complexe du courant du circuit vaut :

$$\dot{I}\Big|_{\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}} = \frac{E_0}{R}. \tag{53}$$

La fréquence à laquelle l'impédance d'un circuit réactif est réelle (résistive) s'appelle « fréquence de résonance »et le phénomène observé à cette fréquence s'appelle « résonance ». Nous allons désigner cette fréquence par le symbole ω_r.

Pour le circuit RLC série, l'amplitude du courant est maximale à la fréquence de résonance.

3.2 Facteur de qualité

À la fréquence de résonance les tensions sur l'inductance et sur le condensateur sont d'amplitudes égales et de phases opposées (car ces éléments sont traversés par le même courant et car leurs impédances ne diffèrent que par les signes, d'après l'équation (49)). Ainsi, d'après (53) et (51) nous avons :

$$\dot{U}_L\Big|_{\omega=\omega_r} = -\dot{U}_C\Big|_{\omega=\omega_r} = Z_L\dot{I}\Big|_{\omega=\omega_r} = jE_0\frac{\omega_r L}{R} = j\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{E_0}{R} \tag{54}$$

deurs, ou sinon, une grandeur sans unité de mesure. Par exemple pour un gain en tension G, la valeur en décibel vaut $G_{dB} = 20\log_{10} G$. Néanmoins, il est possible de représenter en décibels une grandeur dimensionnée, à condition d'indiquer, comme nous l'avons fait, le niveau de référence. Dans notre cas $I_{ref} = 1A$, ainsi $I_{dB} = 20\log(I/I_{ref})$ est légitime car I/I_{ref} est une grandeur non-dimensionnée. *Jamais on n'exprime une grandeur dimensionnée en décibels !*

L'amplitude de la tension sur les éléments réactifs est alors égale

$$|\dot{U}_L|\Big|_{\omega=\omega_r} = |\dot{U}_C|\Big|_{\omega=\omega_r} = E_0\frac{\omega_r L}{R} = E_0\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{55}$$

Ainsi, si $\frac{\omega_r L}{R} > 1$, l'amplitude de tension sur les éléments réactifs dépasse l'amplitude de la tension générée par la source. Notez, que dans la mesure où les tensions des deux éléments ont les phases opposées, leur somme donne zéro, et toute la tension de la source est appliquée à la résistance.

Le paramètre $\frac{\omega_r L}{R}$ a une signification particulière car il exprime le paramètre appelé *facteur de qualité du circuit*. Voici sa définition fondamentale.

> *Le facteur de qualité d'un circuit réactif est défini pour un régime harmonique. Il est égal au rapport entre le maximum de l'énergie stockée dans tous les éléments réactifs d'un circuit et l'énergie dissipée par le circuit en une période, multiplié par* 2π *:*

$$Q = 2\pi\frac{max(W|_{réactive})}{W|_{dissipée\ en\ une\ période}}. \tag{56}$$

Le facteur de qualité est un paramètre énergétique qui traduit, quantifie le caractère réactif du circuit. S'il est élevé, les phénomènes réactifs dominent les effets purement résistifs. En revanche, si le facteur de qualité est faible, le circuit manifeste peu les propriétés réactives. Par exemple, il est facile de voir que le facteur de qualité définit le signe du déterminant de l'équation caractéristique du circuit (*cf.* le cours précédent) et donc le caractère du régime transitoire : si $Q < 2$, $\mathscr{D} > 0$, alors que si $Q > 2$, $\mathscr{D} < 0$.

Appliquons la définition du facteur de qualité à notre circuit à la fréquence de résonance. À tout instant, l'énergie stockée dans les éléments réactifs vaut :

$$W|_{réactive} = W_L(t) + W_C(t) = \frac{Li^2(t)}{2} + \frac{Lu_C^2(t)}{2}. \tag{57}$$

On sait qu'à la fréquence de résonance

$$i(t) = \frac{E_0}{R}\cos\omega_r t \tag{58}$$

et, puisque l'on connaît l'amplitude complexe de la tension u_C (formule (54)),

$$u_C(t) = \frac{E_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\cos(\omega_r t - \frac{\pi}{2}) = \frac{E_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\omega_r t. \tag{59}$$

Pour $W|_{réactive}$ nous avons :

$$W|_{réactive} = \frac{E_0^2}{2R^2}\left(L\cos^2\omega_r t + C\frac{L}{C}\sin^2\omega_r t\right) = \frac{E_0^2 L}{2R^2}. \tag{60}$$

Dans le cas général l'énergie stockée dans les éléments réactifs varie dans le temps (tout en étant une fonction périodique de période $2\pi/\omega$). Pour calculer le facteur de qualité, il faut prendre sa valeur maximale. Cependant, dans le cas du circuit RLC série cette énergie est constante, son maximum est alors égal à elle-même.

L'énergie dissipée en une période est égale à l'intégrale de la puissance instantanée dissipée par la résistance :

$$W|_{dissipée\ en\ une\ période} = \int_t^{t+T} i^2(t)R\mathrm{d}t = \frac{E_0^2}{R}\int_t^{t+T}\cos^2\omega_r t\mathrm{d}t = \frac{E_0^2}{R}\frac{T}{2} = \frac{E_0^2}{R}\frac{\pi}{\omega_r}. \tag{61}$$

Des deux dernières formules on obtient pour le facteur de qualité :

$$Q = 2\pi\frac{\frac{E_0^2 L}{2R^2}}{\frac{E_0^2}{R}\frac{\pi}{\omega_r}} = \frac{L\omega_r}{R}, \tag{62}$$

ce qui est parfaitement identique au facteur entre $|\dot{U}_L|$ et $|\dot{E}|$ dans la formule (55).

À part décrire l'état énergétique, le facteur de qualité caractérise d'autres aspects du circuit, par exemple le rapport entre l'amplitude des tensions sur les éléments réactifs et celle de la tension générée par la source. Il a également une autre signification très importante liée au fonctionnement du circuit RLC en régime de filtre que nous présentons dans le sous-paragraphe suivant.

3.3 Circuit RLC en tant qu'un filtre fréquentiel

Revenons au graphique de l'amplitude du courant du circuit en fonction de la fréquence, présenté sur la figure 5.

Si l'on imagine que le circuit est un quadripôle recevant une tension et générant un courant (on peut le présenter selon le schéma de la figure 6), nous obtenons un *filtre fréquentiel* passe-bande : les signaux de basses et hautes fréquences sont atténués, alors que les signaux dont la fréquence est proche de ω_r sont transmis avec une transconductance maximale.

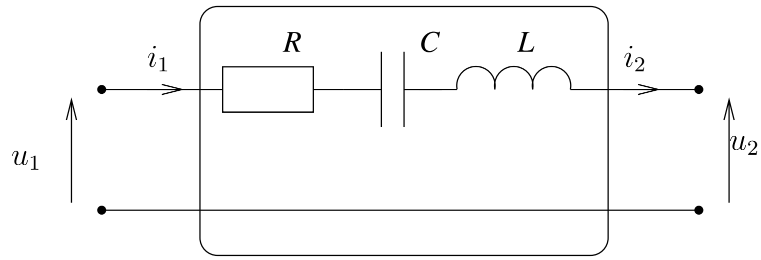

FIG. 6 – Quadripôle de transconductance réalisé à partir d'un circuit RLC série.

La bande passante d'un filtre est définie comme la zone des fréquences où la transmission (de n'importe quel type, *cf.* le cours 3) est supérieure à la transmission maximale réduite de 3 décibels, ce qui correspond à un rapport d'à peu près de $1/\sqrt{2} = 0.707$ entre la transmission maximale et le niveau de la transmission aux frontières de la bande passante.

Selon le type de la bande passante, on distingue un filtre passe-bas ($B.P. = [0, f_0]$), passe-haut ($B.P. = [f_0, \infty]$) et passe-bande ($B.P. = [f_1, f_2]$).

On parle de la *largeur de bande passante* d'un filtre.

La fréquence centrale f_0 d'un filtre passe-bande est *la moyenne géométrique* des fréquences limites de la bande :

$$f_0 = \sqrt{f_2 f_1}. \tag{63}$$

La sélectivité de filtre passe-bande est définie comme le rapport entre la fréquence centrale et la largeur de la bande passante :

$$S = \frac{f_0}{f_2 - f_1}. \tag{64}$$

> *La sélectivité d'un filtre fait à partir d'un circuit RLC série est égale à son facteur de qualité.*

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette affirmation.